Nombres entiers et rationnels

I) Différents types de nombres :

- **9; 7; 17 ; 0 ; $\sqrt{4}$** sont des nombres **entiers naturels**

  $\boxed{2}$

  «nous les connaissons depuis l'école primaire !»

- **3,4 ; 9,87 ; 0,12 ; $\frac{45}{1000}$; $\frac{3}{5}$; $\sqrt{22,09}$** sont des nombres **décimaux**

  $\boxed{0,045}$ $\boxed{0,6}$ $\boxed{4,7}$

  «ces nombres ont un nombre **fini** de chiffres après la virgule ! **Attention**, un nombre **entier** est aussi un nombre **décimal**. 5 = 5,00 !!!»

- **$\frac{1}{3}$; $\frac{9}{11}$; $\frac{14}{6}$** sont des nombres **rationnels**

  $\frac{9}{11} = 0,818181.....$

  «ces nombres peuvent s'écrire sous forme de **quotients de nombres entiers** ! Tout nombre **entier** ou nombre **décimal est aussi** un nombre **rationnel :**
  $7 = \frac{70}{10}$; $9,56 = \frac{956}{100}$»

« il existe des nombres qui ne sont ni entiers, ni décimaux, ni rationnels ! On les appelle des **irrationnels**. *On ne peut pas les écrire*, leur nombre de décimales est infini **et** sans suite logique»

- π est irrationnel. π = 3,14159265358979323846264338327950288419716939….
- $\frac{2}{7}$ est rationnel. $\frac{2}{7}$ = 0,285714 285714 285714…

II) Diviseurs communs à deux entiers :

Définition : Soient a et b deux nombres entiers naturels**.** Un **diviseur commun** à deux entiers positifs a et b est **un nombre entier qui divise a et qui divise b.**

Ex : 7 est un diviseur commun à 35 et 56 (35 = 7 x 5 ; 56 = 7 x 8)

« **1** est un diviseur commun à **tous** les entiers naturels !
13 = 1 x 13 ; 57 = 1 x 57 ; a = 1 x a»

Définition : Le **plus grand des diviseurs** communs de deux entiers naturels est nommé le **PGCD (Plus Grand Commun Diviseur)** de ces deux entiers.

Ex : Recherchons le PGCD de 8 et 12

8 = 4 x 2 = 2 x 2 x 2

Les diviseurs de 8 sont 1, 2, 4, 8

12 = 4 x 3 = 2 x 2 x 3

Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6, 12

Les diviseurs communs à 8 et 12 sont 1, 2, **4**
Le PGCD de 8 et 12 est 4. **PGCD (8 ; 12) = 4**

« les diviseurs communs divisent le PGCD !»

<u>Définition :</u> Deux entiers naturels non nuls sont **premiers entre eux** lorsque leur PGCD est égal à 1

<u>Ex</u> :
Les diviseurs de 5 sont **1** et 5
Les diviseurs de 12 sont **1**, 2, 3, 4, 6, 12
5 et 12 sont premiers entre eux. PGCD (5 ;12) = 1

III) <u>Recherche du PGCD :</u>

1) 1ère méthode : l'**algorithme des soustractions successives**

Propriété : Soient a et b deux entiers naturels tels que a>b
PGCD (a,b) = PGCD (b, a – b)

« si un nombre **divise a et b**, il divise forcément leur différence **a - b**!
Par exemple, **5** divise **25 et 10**, il divise donc **(25 - 10)** soit 15 !»

<u>Calculons le PGCD de 66 et 48</u>

66 – 48 = 18 ← « PGCD (66,48) = PGCD(48,18) »

48 – 18 = 30 ← « PGCD (48,18) = PGCD(30,18) »

30 – 18 = 12 ← « PGCD (30,18) = PGCD(18,12) »

18 – 12 = 6 ← « PGCD (18,12) = PGCD(12,6) »

12 – 6 = 6 ← « PGCD (12,6) = PGCD(6,6) = 6»

« j'arrête mes soustractions, la différence suivante serait égale à 0 ! »

B) 2ème méthode : l'**algorithme d'Euclide**

Pour trouver facilement le **diviseur commun le plus grand** (PGCD), le mathématicien grec Euclide a mis au point une méthode appelée l'**algorithme d'Euclide** (ou algorithme des divisions successives)**.**

Il remarqua la **propriété suivante** :

Propriété : Soient a et b deux entiers naturels tels que a>b
Si le reste de la division euclidienne de a par b est non nul :
PGCD (a,b) = PGCD (b,r)

Vérifions le sur l' exemple précédent : 12 = 8 x 1 + 4 et 4<8

$$\begin{array}{r|l} 12 & 8 \\ \cline{2-2} 4 & 1 \end{array}$$

PGCD (12,8) = 4

PGCD (8,4) = 4

« la propriété est vérifiée !»

« Pourquoi ne pas continuer ? Je trouverai alors facilement le PGCD en m'arrêtant quand le reste sera nul !» se dit Euclide

Calculons le PGCD de 288 et 84

$$\begin{array}{r|l} 288 & 84 \\ \cline{2-2} 36 & 3 \end{array}$$

288 = **84** x 3 + 36 et 36<84

$$\begin{array}{r|l} 84 & 36 \\ \cline{2-2} 12 & 2 \end{array}$$

84 = **36** x 2 + 12 et 12<36

$$\begin{array}{r|l} 36 & 12 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$$

84 = **36** x 2 + 12 et 12<36

Voici le dernier reste non nul, c'est forcément le PGCD donc
PGCD (288,84) = 12

Le PGCD de 12 et 0 est 12. Le PGCD est donc le dernier reste non nul des divisions euclidiennes successives.

III) Fractions irréductibles :

Définition : une fraction est **irréductible** lorsque son **numérateur** et son **dénominateur** sont **premiers** entre eux.

Ex : La fraction $\frac{7}{13}$ est irréductible. On ne peut pas la simplifier. Il n'y a **pas de diviseur commun** à part 1

Ex : Ecrivons la fraction $\frac{60}{45}$ sous forme irréductible :

Il suffit de diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD (nous serons alors certains qu'il n'existe plus de diviseur commun à part 1)

Déterminons le PGCD de 60 et 45 (algorithme d'Euclide)

60	45	45	15
15	1	0	3

PGCD (60,45) = 15

On a donc :

$$\frac{60}{45} = \frac{15 \times 4}{15 \times 3} = \frac{4}{3}$$ **avec la fraction $\frac{4}{3}$ irréductible**

rappel :
Un nombre est divisible par 2 si son dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8.
(ex : 546, 340, 34…)
Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
(ex : 345 car 3 + 4 + 5 = 12)
Un nombre est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4. (ex : 216 car 16 = 4 x 4)
Un nombre est divisible par 5 si son dernier chiffre est 0 ou 5. (ex : 725, 80….)
Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.