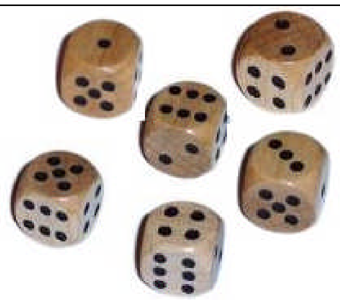
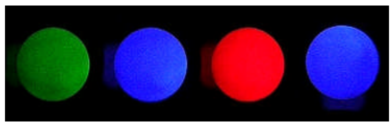
# probabilité

Des phénomènes, des situations ou plus généralement **des expériences** permettent de s'intéresser à la probabilité. Quelles chances ai-je d'obtenir tel ou tel résultat ? Peut on calculer un taux de réussite ?

Exemples :

| expérience 1 | expérience 2 | expérience 3 |
| --- | --- | --- |
| **« je lance une pièce de monnaie non truquée »** On regarde ensuite la face supérieure | **« je lance un dé non truqué »** On regarde ensuite le nombre de points sur la face supérieure | **« je tire au hasard une boule dans un sac contenant 2 boules bleues, une boule rouge, une boule verte. »** On regarde la couleur de la boule obtenue |
|  |  |  |

## I) Vocabulaire :

**Définition :** Chacun des résultats possibles d'une expérience est une **issue** de l'expérience

l'expérience 1 a deux issues : pile et face

l'expérience 2 a six issues : 1, 2, 3, 4, 5, 6

l'expérience 3 a trois issues : bleu, vert, rouge

**Définition :** un **événement** est défini par une condition conduisant à un ensemble d'issues. Un événement réalisé par une seule issue est **élémentaire**.

Ex :
Dans l'expérience 2, l'**événement** « on obtient un nombre impair » est réalisé par les issues 1, 3, 5.

Dans l'expérience 3, l'**événement** « on n'obtient pas de boule rouge » est réalisé par les deux issues : bleu et vert

Dans l'expérience 1, l'**événement** « on obtient pile » est réalisé par une issue :pile.
C'est un événement **élémentaire**

**Définition :** une expérience est dite **aléatoire** si elle a plusieurs issues possibles sans savoir avec certitude quelles seront les issues produites.

« Une expérience aléatoire est uniquement due au **hasard !! »**

## II) Notion de probabilité :

**Définition :** Si on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement se stabilise autour d'un nombre : **la probabilité de cet événement**. Soit A un événement, on note **p(A)** sa probabilité.

« Mais alors, c'est un peu comme si le hasard n'existait pas ! Par exemple, au bout de milliers de tirages du loto, les boules sont chacune sorties le même nombre de fois (à peu près) **!!!»**

Ex :

Dans l'expérience 1, si on lance la pièce un très grand nombre de fois, on aurait *pile* environ une fois sur deux.

Dans l'expérience 2, si on lance le dé un très grand nombre de fois, on aurait *4* environ une fois sur six.

Dans l'expérience 3, si on tire une boule un très grand nombre de fois, on aurait *une boule bleue* environ une fois sur deux.

« la probabilité de tirer une boule bleue est de $\frac{1}{2}$ car on a deux *« chances »* sur 4 de tirer une boule bleue !**»**

## III) Calcul d'une probabilité :

**Propriété :** Quand les issues d'une expérience aléatoire ont toutes la même probabilité (situation d'équiprobabilité) alors la probabilité d'un événement est :

$$\frac{\textbf{nombre d'issues correspondant à l'événement}}{\textbf{nombre d'issues possibles}}$$

Ex :

Dans l'expérience 1, la situation est équiprobable (on a autant de chances d'obtenir pile que face). Considérons l'événement A : « on obtient face » $p(A) = \frac{1}{2}$

« il y a bien une seule issue correspondante à l'événement (face) et deux issues possibles (pile et face)»

Dans l'expérience 2, la situation est équiprobable (on a autant de chances d'obtenir 1, que 2, que 3, que 4, que 5, que 6). Considérons l'événement B : « on obtient 5 ou 4»
$p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

« il y a bien deux issues correspondantes à l'événement (5 et 4) et 6 issues possibles (1, 2, 3, 4, 5, 6)»

Dans l'expérience 3, la situation **n'est pas équiprobable** (on a deux fois plus de chances d'obtenir la couleur bleue). Je n'applique pas la formule.
Considérons l'événement C : « on obtient la couleur bleue », 2 boules sur 4 sont bleues donc il y a deux chances sur 4 d'obtenir une boule bleue $p(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

**Propriétés :**

- Une probabilité est **un nombre compris entre 0 et 1**

- Un événement est dit **impossible** s'il ne peut pas se produire : sa probabilité est 0
  Ex : dans l'expérience 2, l'événement Z : « on obtient 11 » est impossible et p(Z) = 0

- Un événement est dit **certain** s'il se produit nécessairement : sa probabilité est 1
  Ex : dans l'expérience 2, l'événement H : « on obtient un nombre inférieur ou égal à 6 » est **certain** et p(H) = 1

- La **somme des probabilités des issues** d'une expérience est **égale à 1**
  Ex : dans l'expérience 3, soit A : « on obtient une boule bleue», soit B : « on obtient une boule rouge», soit C : « on obtient une boule verte». P(A) + P(B) + P(C)= 1

## IV) Évènements incompatibles. Évènements contraires :

**Définition :** deux évènements sont **incompatibles** s'ils ne peuvent se réaliser en même temps
Ex : dans l'expérience 2, l'événement A : « on obtient 6 » et l'événement B : « on obtient 3 » sont incompatibles

**Propriété :** lorsque deux évènements sont incompatibles, la probabilité pour que **l'un ou l'autre** se réalise est égale à **la somme de leurs probabilités**
Ex : dans l'expérience 2, l'événement C : « on obtient 6 ou on obtient 3 » est

$p(C) = p(A) + p(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

**Définition :** l'événement **contraire** d'un événement A est celui qui se réalise quand A ne se réalise pas. On le note $\overline{A}$ (« A barre »)
Ex : dans l'expérience 2, soit l'événement D : « on obtient 3 ». L'événement contraire $\overline{D}$ peut s'écrire : « on n'obtient pas 3 »

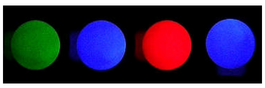
**Propriété :** la **somme des probabilités** d'un événement A et de son contraire est **1**
$p(A) + p(\overline{A}) = 1$

Ex : calculons la probabilité de l'événement contraire de D, $p(\overline{D}) = 1 - p(D) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

## V) Arbres de probabilité :

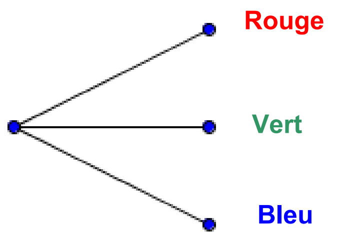
**Définition :** l'arbre de probabilité d'une expérience indique chacune de ses **issues**. On peut **pondérer** l'arbre des probabilités en indiquant **sur chaque branche** la probabilité correspondante.

Ex : reprenons l'expérience 3.

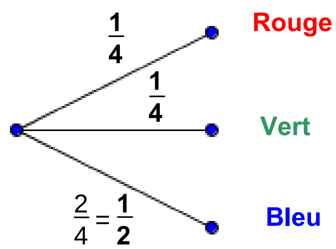


**« je tire au hasard une boule dans un sac contenant 2 boules bleues, une boule rouge, une boule verte. Je regarde la couleur obtenue. »**

arbre de probabilité

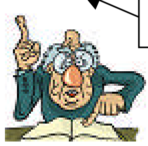



arbre pondéré en probabilité




$P(R) = \frac{1}{4}$   $P(V) = \frac{1}{4}$   $P(B) = \frac{1}{2}$   et on a bien $\mathbf{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1}$

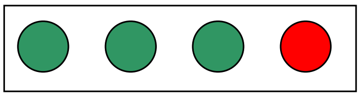
« la **somme** des probabilités des issues est **égale à 1** »



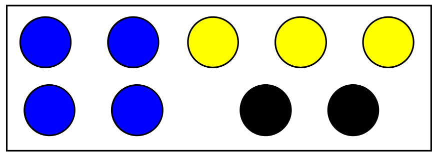
## V) Expérience à deux épreuves :

L'expérience est constituée de deux épreuves successives

Ex : On dispose de deux boîtes contenant des boules

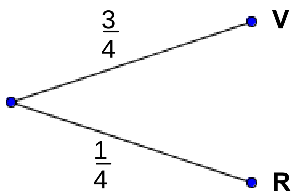


Boîte A

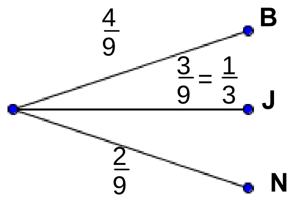


Boîte B

On tire **d'abord** une boule dans la boîte A et on note sa couleur.
**Ensuite**, on tire une boule dans la deuxième boîte B et on note la couleur.

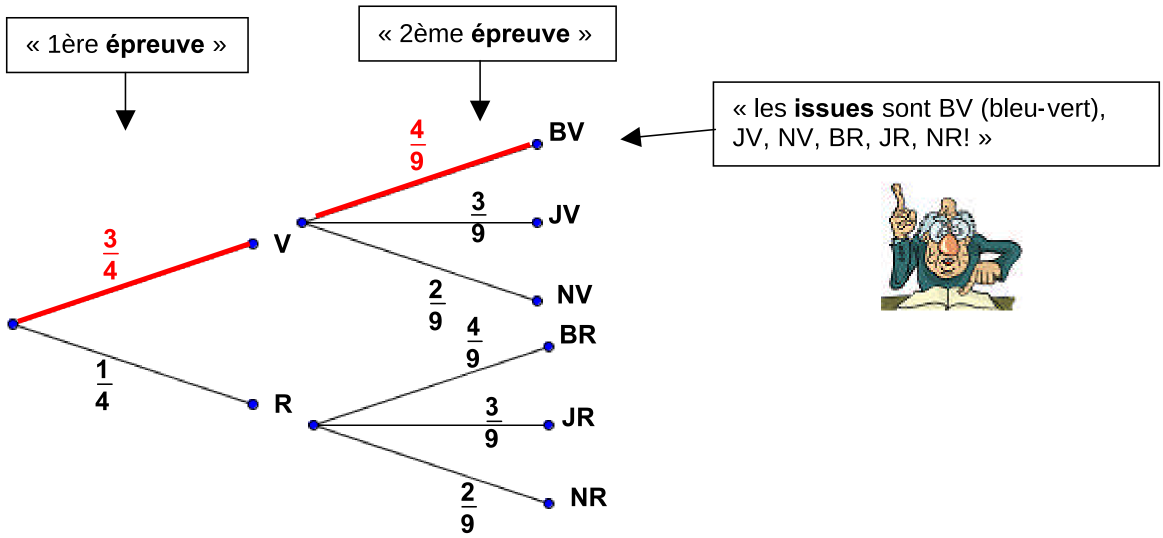



arbre pondéré de la première épreuve




arbre pondéré de la deuxième épreuve

On trace ensuite l'arbre pondéré en probabilité de l'expérience (deux épreuves)




**Propriété :** Sur un arbre, la probabilité du résultat (de l'issue) est égale a**u produit des probabilités** rencontrées le long du chemin pour y parvenir

$$\mathbf{P(BV)} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{3 \times 4}{4 \times 9} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

« la probabilité d'obtenir **une boule verte et une boule jaune** à l'issue de l'expérience est $\mathbf{\frac{1}{3}}$ »