calcul littéral - identités remarquables

<u>simplification d'écriture (rappel)</u> :

Pour simplifier l'écriture d'une suite d'additions, on peut :

- supprimer les signes d'addition et les parenthèses autour des nombres relatifs.
- écrire le premier terme sans parenthèses
- supprimer le signe "+" devant un nombre se trouvant en début de ligne

L'expression obtenue est **une somme algébrique**.

<u>Ex :</u> (– 9,7) **+** (+ 3) **+** (– 7,8) **+** (– 6,9) **+** (+ 2,1) = – 9,7 + 3 – 7,8 – 6,9 + 2,1
(+14) – (–10) + (–8) = (+14) + (+10) + (–8) = 14 + 10 –8

Dans un calcul littéral, les lettres remplacent des nombres et la simplification d'écriture est du même type.

<u>Ex :</u>

$$\begin{aligned} & 5 - (x - 4) - (-y) + 6 \\ = \; & 5 - \left[x + (-4)\right] + (+y) + 6 \\ = \; & 5 + \left[(-x) + (+4)\right] + y + 6 \\ = \; & 5 - x + 4 + y + 6 \\ = \; & -x + y + 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a - (b - c) + (d - e) \\ = \; & a + (-b + c) + (d - e) \\ = \; & a - b + c + d - e \end{aligned}$$

« l'**opposé d'une somme** est la **somme des opposés** ! »

I) Développement - factorisation : *(rappels)*

<u>définition :</u> développer un produit, c'est le transformer en une somme algébrique.
k, a, b, c, d désignent des nombres relatifs

k (a + b) = ka + kb

développer

k (a – b) = ka – kb

développer

Ex :
<u>Développons l'expression suivante:</u>

$\mathbf{(x + 3)7x - 5(x - 3)}$

$= x \times 7x + 3 \times 7 \times x - 5 \times x - 5 \times (-3)$

$= 7x^2 + 21x - 5x + 15$

$= \mathbf{7x^2 + 16x + 15}$ ← « je **réduis l'expression** en regroupant les termes de même nature et en effectuant les calculs !»

<u>définition :</u> factoriser une somme algébrique, c'est la transformer en produit.
k, a, b, désignent des nombres relatifs

« k est le **facteur commun** qui me permet de factoriser!»

ka + kb = k (a + b)

factoriser

ka – kb = k (a – b)

factoriser

« en effet,
k(a – b)
= k(a + (–b))
= ka + (–kb)
= ka – kb »

Ex : Factorisons les expressions suivantes :

▶ $6b + 15b^2$

$= \mathbf{3b} \times 2 + \mathbf{3b} \times 5b$

$= \mathbf{3b}(2 + 5b)$

▶ $10a - 22a^2$

$= \mathbf{2a} \times 5 - \mathbf{2a} \times 11a$

$= \mathbf{2a}(5 - 11a)$

▶ $(x + 3)\ (2x - 2) - (5x + 1)\ (x + 3)$ ◀ «j'ai trouvé un **facteur commun**, il s'agit de $(x + 3)$ **!**»

$= (x + 3)\ [\ (2x - 2) - (5x + 1)]$ ◀ «attention à laisser les parenthèses autour de $(5x + 1)$ **!**»

$= (x + 3)\ (\ 2x - 2 - 5x - 1)$ ◀ «l'opposé d'une somme est la somme des opposés **!**»

$= (x + 3)\ (\ -3x - 3)$

II) Double distributivité :

- développer et réduire des expressions du type (a + b)(c + d) -

Pourquoi **double** ?
Je distribue a puis je distribue c.
J'utilise **deux fois** la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition !

propriété : a,b,c,d désignent quatre nombres relatifs

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

produit de deux facteurs

somme de quatre termes

Ex :

Développons et réduisons les expressions suivantes :

$(x + 3) \times (y + 7)$
$= x \times y + x \times 7 + 3 \times y + 3 \times 7$
$= x y + 7x + 3 y + 21$

$(a - 5)(-7 + a)$
$= a \times (-7) + a \times a + (-5) \times (-7) + (-5) \times a$
$= -7a + a^2 + 35 - 5a$
$= a^2 - 12a + 35$

III) Identités remarquables :

Les **identités** (ou égalités) **remarquables** accélèrent les calculs.
Pour développer $(x + 3)^2$, je faisais
$(x + 3)(x + 3)$
$= x \times x + x \times 3 + 3 \times x + 3 \times 3$
$= x^2 + 3x + 3x + 9$
$= x^2 + 6x + 9$
Je vais pouvoir aller beaucoup plus vite en utilisant ces égalités !!

a) carré d'une somme :

propriété : a et b désignent des nombres relatifs

développer

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

factoriser

Le terme **2ab** est appelé **double produit**.
C'est **deux fois** le produit ab **!!**

Ex :

développer

$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$

J'ai reconnu une identité remarquable puis développé l'expression **!**

$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = (2x + 3)^2$

factoriser

J'ai reconnu une identité remarquable puis factorisé l'expression **!**

b) carré d'une différence :

propriété : a et b désignent des nombres relatifs

développer

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

factoriser

b^2 est le carré de b

a^2 est le carré de a

Ex :

développer

$(7x - 3)^2 = (7x)^2 - 2 \times 7x \times 3 + 3^2 = 49x^2 - 42x + 9$

J'ai reconnu une identité remarquable puis développé l'expression **!**

$16x^2 - 56x + 49 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 7 + 7^2 = (4x - 7)^2$

factoriser

J'ai reconnu une identité remarquable puis factorisé l'expression **!**

c) <u>différence de deux carrés :</u>

propriété : a et b désignent des nombres relatifs

$$\xrightarrow{\text{développer}}$$

$$\mathbf{(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2}$$

$$\xleftarrow[\text{factoriser}]{}$$

Ex :

$$(3x + 5)\ (3x - 5) \xrightarrow{\text{développer}} (3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$$

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)\ (2x + 3)$$

$$\xrightarrow[\text{factoriser}]{}$$