

Fonctions linéaires et fonctions affines

I) fonction linéaire :

a) proportionnalité et fonction linéaire

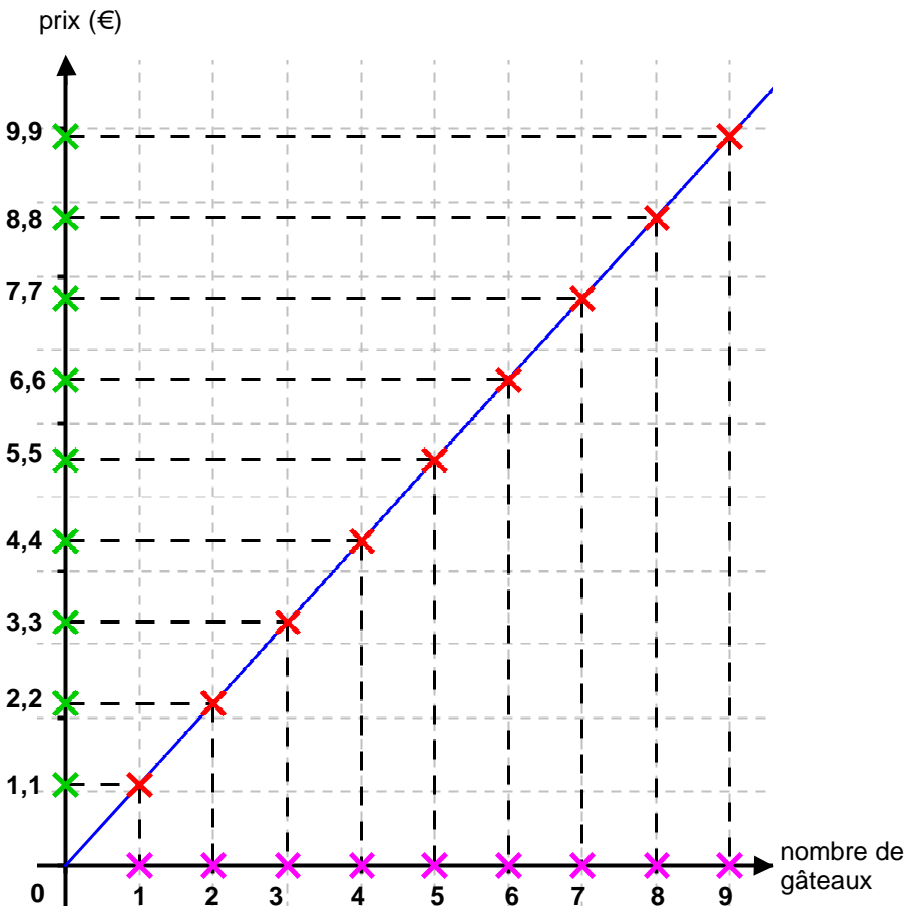
Voici un tableau de valeurs indiquant le prix à payer en fonction du nombre de gâteaux

Nombre de gâteaux	1	2	3	4	5	6	7	8	9	X 1,1
Prix (€)	1,1	2,2	3,3	4,4	5,5	6,6	7,7	8,8	9,9	

« Le prix à payer est **proportionnel** au nombre de gâteaux. Le **coefficient de proportionnalité** permettant de trouver le prix en fonction du nombre de gâteaux est **1,1** »



Traçons la courbe représentant le prix en fonction du nombre de gâteaux :



. la courbe obtenue est **une droite** passant par l'**origine du repère**
 . les **ordonnées des points de la courbe** (vert) sont proportionnelles aux **abscisses** (violet)



Une telle courbe est la représentation graphique d'**une fonction linéaire**

$$f : x \longmapsto 1,1x$$

« **formule littérale** de la fonction ! »



b) Définition : Soit a un nombre relatif. La **fonction linéaire f de coefficient a** associe à chaque nombre x le nombre $a \times x$ ou ax

Ex :

Soit la fonction f qui à un nombre x fait correspondre son triple $f : x \longmapsto 3x$

$$f(-2) = 3 \times (-2) = -6 \quad \text{« } f \text{ est une fonction linéaire de coefficient 3 ! »}$$

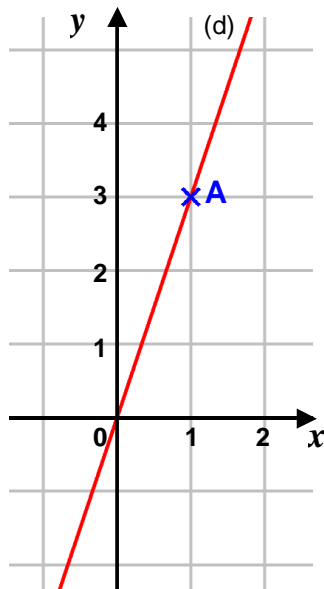


c) Représentation graphique :

Définition : La représentation graphique de la fonction linéaire $f : x \longmapsto ax$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; ax)$

Propriété : La représentation graphique de la fonction linéaire $x \longmapsto ax$ est une **droite** passant par l'**origine du repère**.
 a est le **coefficient directeur** de la droite

Ex : Traçons la représentation graphique de la fonction $f : x \longmapsto 3x$



- La représentation graphique est une **droite** passant par l'**origine du repère**.
- Il me suffit d'un **second point** !
- Je choisis de calculer l'**image de 1**.
 $f(1) = 3 \times 1 = 3$
- J' **obtiens** un point A de la courbe.
- Il ne reste plus qu'à tracer la droite !



La droite (d) a pour **équation** :

$$y = 3x$$

coefficient directeur
de la droite

d) Pourcentages et fonction linéaire :

Propriété : Soit t un nombre positif

► une **augmentation de $t\%$** est représentée par la fonction linéaire $f : x \longmapsto \left(1 + \frac{t}{100}\right)x$

► une **diminution de $t\%$** est représentée par la fonction linéaire $f : x \longmapsto \left(1 - \frac{t}{100}\right)x$

Ex :

Le prix d'un manteau valant 54 € a augmenté de 12%. Quel est le nouveau prix ?

Le nouveau prix est égal à $\left(1 + \frac{12}{100}\right) \times 54 = 1,12 \times 54 = 60,48$ €

Le volume de l'eau diminue de 8% en passant de l'état solide à l'état liquide.

Quel volume de liquide obtient-t-on à partir de 464 cm³ de glace ?

Le volume de liquide est égal à $\left(1 - \frac{8}{100}\right) \times 464 = 0,92 \times 464 = 426,88$ cm³

II) fonction affine :

a) **Définition** : Soient a et b deux nombres relatifs. La **fonction affine de coefficients a et b** associe à chaque nombre x le nombre $a \times x + b$ ou $ax + b$

La fonction s'écrit $f : x \longmapsto ax + b$ « la fonction f **associe** $ax + b$ à x ! »
 $f(x)$ est « l'**image** de x par la fonction f »



Ex. : Soit la fonction affine $g : x \longmapsto 3x + 2$
 $g(4) = 3 \times 4 + 2 = 14$ L'image de 4 par la fonction g est 14

• Si $a = 0$ alors $f(x) = 0x + b = b$ « on dit que f est **constante!** »

• Si $b = 0$ alors $f(x) = ax + 0 = ax$ « f est une **fonction linéaire!** »



Ex. : Soit la fonction $h : x \longmapsto -3$ h est une fonction constante

b) représentation graphique d'une fonction affine :

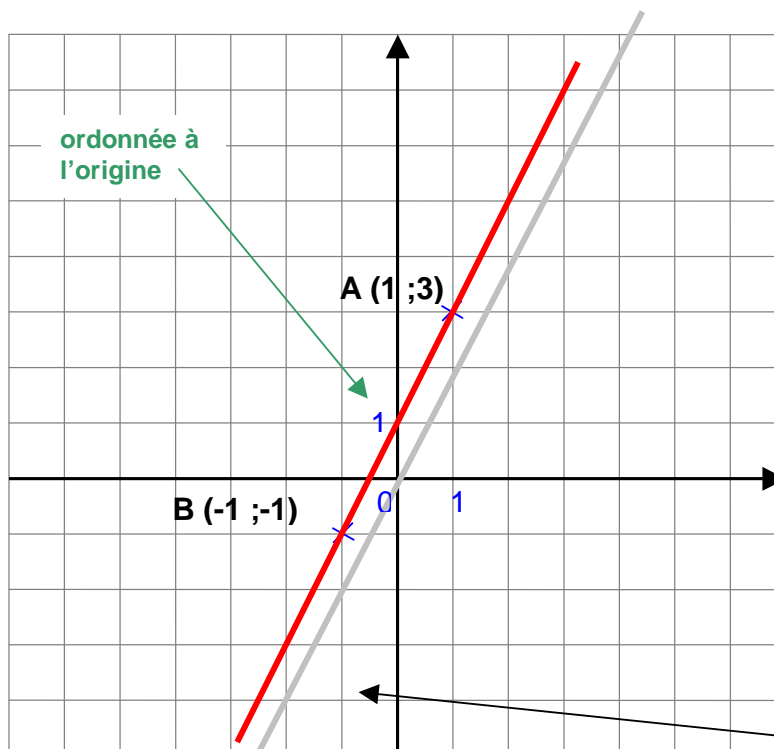
Définition : La représentation graphique de la fonction affine $x \longmapsto ax + b$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; ax + b)$

Propriété : La représentation graphique de la fonction affine $x \longmapsto ax + b$ est une **droite**.

a est le **coefficient directeur** de la droite.

b est l'**ordonnée à l'origine** de la droite.

Représentons la fonction affine $g : x \longmapsto 2x + 1$



« il me suffit de **deux points** pour tracer la droite ! »

$g(1) = 3$ et $g(-1) = -1$ donc $A(1 ; 3)$ et $B(-1 ; -1)$ sont deux points de la courbe !



La droite (AB) a pour équation :

$$y = 2x + 1$$

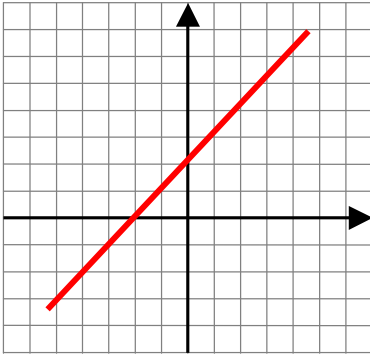
coefficient directeur
de la droite

ordonnée à l'origine

La droite (AB) est **parallèle** à la droite représentant la **fonction linéaire associée**

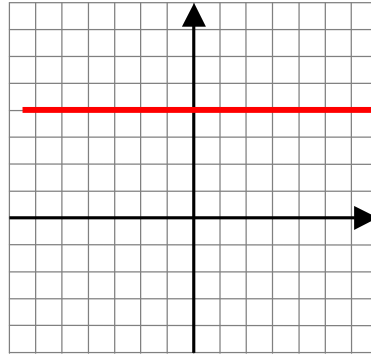
$$y = 2x$$

Remarque : l'allure de la droite varie selon le signe du coefficient directeur



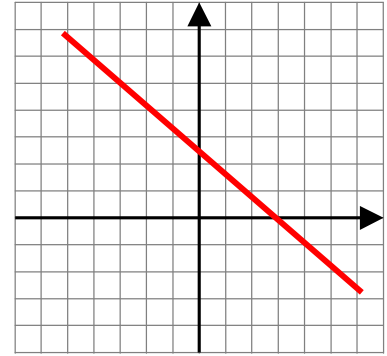
$$a > 0$$

la droite
« *monte* ! »



$$a = 0$$

la droite est parallèle à
l'axe des abscisses!



$$a < 0$$

la droite
« *descend* ! »

III) proportionnalité des accroissements :

Propriété: Soit f la fonction affine $x \mapsto ax + b$
Les accroissements de $f(x)$ et les accroissements de x sont **proportionnels**.

Le coefficient de proportionnalité est le **coefficient directeur a**.

Soient deux points de la courbe :

On a $a = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}$

Ex : Soit la fonction affine f

$$x \mapsto 2x + 1$$

« x augmente de 3 et $f(x)$ augmente de $2 \times 3 = 6!$ »

$$\text{On a } f(1) = 3 \text{ et } f(4) = 9$$



On a :

$$\frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{9 - 3}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

