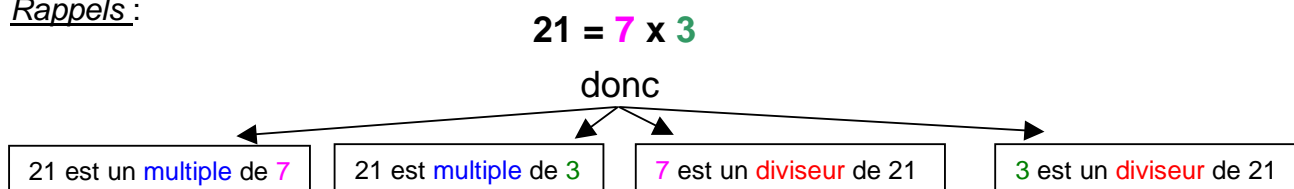


Nombres premiers - fractions irréductibles

Rappels :



définition : Soit a un entier naturel s'écrivant sous la forme d'un produit de deux entiers naturels b et c , on a : $a = b \times c$

On dit :

- que a est un **multiple de b** et que a est un **multiple de c**
- que a est **divisible par b** et que a est **divisible par c**
- que b est un **diviseur de a** et que c est un **diviseur de a**

- ▶ Tout nombre est multiple de 1 et 1 est diviseur de tout entier naturel !
Quel que soit le nombre n , on a $n = n \times 1$!
- ▶ 0 est un multiple de tous les entiers naturels
Quel que soit le nombre n , on a $0 = n \times 0$!
- ▶ Tout nombre entier naturel est un multiple de lui-même
Quel que soit le nombre n , on a $n = n \times 1$!



1) Nombres premiers :

"distincts" signifie "différents" !

définition :

Un **nombre premier** est un entier naturel qui a **exactement deux diviseurs distincts** : **1** et **lui-même**

Début de la liste des nombres premiers : **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37**



En Janvier 2016, un mathématicien a découvert un nouveau nombre premier comptant 22 millions de chiffres. Il s'écrit à l'aide de puissances : $2^{74207281} - 1$!!

remarques :

- 6 n'est pas un nombre premier car il est **divisible par 1, 6, 3, 2**
- 1 n'est pas un nombre premier car il n'admet qu'**un seul diviseur** : lui-même
- 0 n'est pas un nombre premier car il est **divisible par tout nombre non nul**

II) Diviseurs communs à deux nombres entiers :

définition :

Un **diviseur commun d** à deux entiers naturels **a** et **b** est un **entier naturel qui divise à la fois a et b**.

Ex :

2 est un **diviseur commun** à 30 et 42.

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow & \searrow \\ \boxed{30 = 2 \times 15} & & \boxed{42 = 2 \times 21} \end{array}$$

a et b sont divisibles par d !



Les diviseurs communs à 30 et 42 sont : 1, 2, 3, 6

définition :

Deux nombres sont **premiers entre eux** lorsque **leur seul diviseur commun est 1**.

Ex : 20 et 33 sont premiers entre eux.

- diviseurs de 20 : 1, 20, 2, 10, 4, 5
- diviseurs de 33 : 1, 33, 3, 11

le seul diviseur commun est 1 !



III) Décomposition en produit de facteurs premiers :

propriété : Un **entier naturel** supérieur ou égal à 2 se décompose en **produit de facteurs premiers**. La **décomposition** est **unique** (on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs)

Ex :

► Décomposons 360 en produit de facteurs premiers.
On cherche les diviseurs premiers dans l'ordre croissant.

$$360 = 2 \times 180$$

$$360 = 2 \times 2 \times 90$$

$$360 = 2 \times 2 \times 90$$

$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 45$$

$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 15$$

$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

indispensable !

► le début de la liste des nombres premiers :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23

► un nombre entier est divisible :

par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8

ex : 758, 976

par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3

ex : 750, 951

par 5 s'il se termine par 0 ou 5

ex : 750, 975

On écrit la décomposition en produit de facteurs premiers : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

► Décomposons 2400 en produit de facteurs premiers.

On peut se faciliter le travail en écrivant des produits intermédiaires

$$2400 = 24 \times 100 = 6 \times 4 \times 25 \times 4 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 = 2^5 \times 5^2 \times 3$$



IV) Fraction irréductible :

définition : Une **fraction** est **irréductible** lorsque **le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux**.

Ex :

► $\frac{13}{14}$ est une **fraction irréductible**

13 et 14 sont premiers entre eux.
 $13 = 1 \times 13$
 $14 = 1 \times 2 \times 7$



On peut rendre une fraction irréductible et la simplifier ainsi au maximum.

Ex :

Simplifions la fraction $\frac{588}{140}$

$$588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$$

$$140 = 2 \times 3 \times 7^2$$

← on décompose le numérateur et le dénominateur en facteurs premiers !



$$\frac{588}{140} = \frac{2^2 \times 3 \times 7^2}{2 \times 3 \times 7^2} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{7} \times \cancel{7}}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{7} \times \cancel{7}} = \frac{2}{7}$$