Proportionnalité

Rappel :
"Le coût de l'achat de baguettes de pain est **proportionnel** au nombre de baguettes achetées. Si j'achète **deux fois plus** de baguettes, je paierai **deux fois plus**"

I) Mise en évidence de la proportionnalité :

a) tableau - coefficient de proportionnalité :

définition : Un tableau de proportionnalité est un tableau pour lequel on peut passer des nombres d'une ligne aux nombres correspondants de l'autre ligne **en multipliant par un même nombre** : **le coefficient de proportionnalité**.

Ex :
Julien a relevé dans un tableau la consommation de son scooter

Distance parcourue (km)	10	30	50	100
Consommation d'essence (L)	0,25	0,75	1,25	2,5

x 0,025

x 40

Julien a obtenu un tableau de proportionnalité. On peut passer d'une ligne à l'autre en multipliant par un même nombre.

$$\frac{0,25}{10} = \frac{0,75}{30} = \frac{1,25}{50} = \frac{2,5}{100} = 0,025$$

Le coefficient de proportionnalité est **0,025**.
C'est la quantité d'essence nécessaire pour parcourir 1 km.

attention, 40 est aussi un coefficient de proportionnalité.
Ce nombre permet de passer de la deuxième à la première ligne !

$$\frac{10}{0,25} = \frac{30}{0,75} = \frac{30}{1,25} = \frac{100}{2,5} = 40$$

b) représentation graphique :

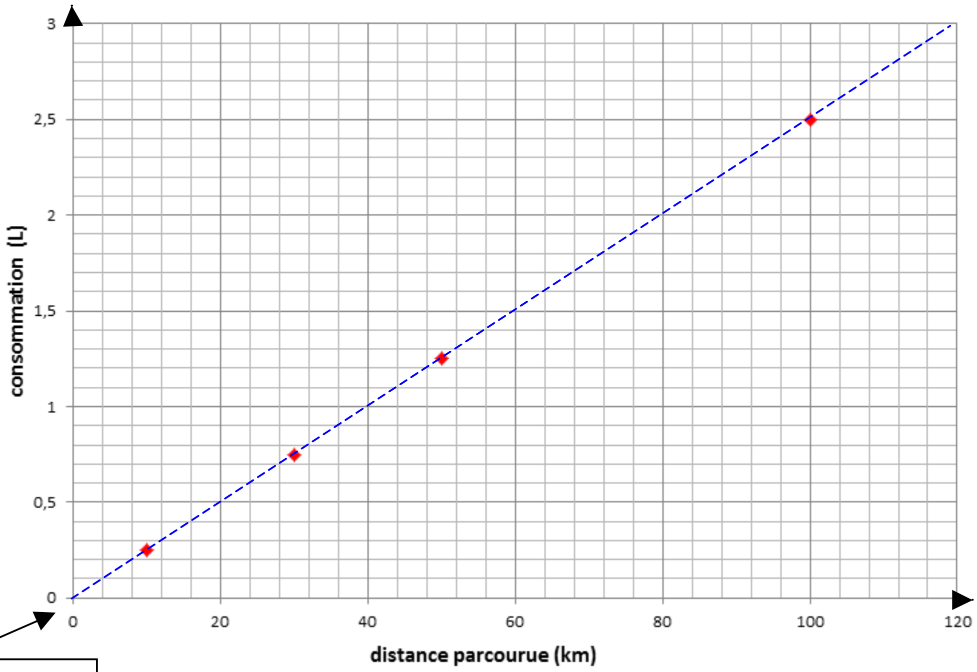
propriétés :
► **si** une situation est proportionnelle **alors** les points de sa représentation graphique sont alignés avec l'origine du repère.

la propriété réciproque est vraie

► **si** les points de sa représentation graphique sont alignés avec l'origine du repère **alors** la situation est proportionnelle.

Ex : Reprenons la situation précédente

les points de la représentation graphique sont alignés avec l'origine du repère. La situation est bien proportionnelle !



origine du repère

II) Calculs avec des situations proportionnelles :

Sur une carte routière, 4 cm représentent 10 km.
Déterminer la distance réelle correspondante à 18 cm sur la carte.

Distance sur la carte (cm)	4	18
Distance réelle (km)	10	x

La situation est proportionnelle (si la distance réelle est deux fois plus grande, la distance sur la carte sera deux fois plus grande !)
Soit x la distance réelle cherchée.

on cherche à savoir à quoi correspondra 1 cm !

► méthode 1 : passage par l'unité

4cm sur la carte correspondent à 10km dans la réalité
donc
1cm correspond à 4 fois moins c'est à dire 10 : 4 = 2,5 km
par suite,
18 cm correspondent à 18 x 2,5 = 45 km

3 étapes ! Cette méthode est aussi appelée la règle de trois !

► méthode 2 : on détermine le coefficient de proportionnalité

Le coefficient de proportionnalité est $\frac{10}{4} = 2,5$

Donc x = 18 x 2,5 = 45 km.

On a choisi celui permettant de passer de la première à la deuxième ligne !

Distance sur la carte (cm)	4	18
Distance réelle (km)	10	x

x 2,5

► méthode 3 : on utilise l'égalité des produits en croix

4 x x = 18 x 10 donc $x = \dfrac{18 \text{ x } 10}{4}$ = 45 km

On fait le produit des nombres sur la diagonale puis on divise par celui qui est tout "seul"

Distance sur la carte (cm)	4	18
Distance réelle (km)	10	x

III) Pourcentages - proportionnalité - fonctions linéaires :

Calculer le pourcentage d'une quantité, augmenter ou diminuer une quantité d'un pourcentage sont des situations proportionnelles, on peut donc les modéliser par des fonctions linéaires.

► Prendre 3% d'une quantité x, c'est la multiplier par 0,03

$\dfrac{3}{100}x = 0{,}03x$ ← la fonction linéaire correspondante est $f : x \longmapsto 0{,}03x$

► Augmenter de 3% une quantité x, c'est la multiplier par **1**,03 $\left(\mathbf{1} + \dfrac{3}{100}\right)$

$x + \dfrac{3}{100}x = \left(1 + \dfrac{3}{100}\right)x = 1{,}03x$ ← la fonction linéaire correspondante est $f : x \longmapsto 1{,}03x$

► Diminuer de 3% une quantité x, c'est la multiplier par 0,97 $\left(\mathbf{1} - \dfrac{3}{100}\right)$

$x - \dfrac{3}{100}x = \left(1 - \dfrac{3}{100}\right)x = 0{,}97x$ ← la fonction linéaire correspondante est $f : x \longmapsto (1 - 0{,}03)x$

Ex :

► 18% des 450 élèves du collège sont grippés. Combien d'élèves sont grippés ?

$\dfrac{18}{100}$ x 450 = 0,18 x 450 = 81 élèves

► Le prix d'un manteau valant 54 € a augmenté de 12%. Quel est le nouveau prix ?

Le nouveau prix est égal à $\left(1 + \dfrac{12}{100}\right)$ x 54 = 1,12 x 54 = 60,48 €

► Le volume de l'eau diminue de 8% en passant de l'état solide à l'état liquide. Quel volume de liquide obtient-t-on à partir de 464 cm^3 de glace ?

Le volume de liquide est égal à $\left(1 - \dfrac{8}{100}\right)$ x 464 = 0,92 x 464 = 426,88 cm^3

IV) Grandeurs composées :

a) grandeur quotient :

définition : Lorsqu'on effectue le quotient de deux grandeurs, on obtient **une grandeur quotient.**

Ex :
- **la vitesse** est le quotient de deux grandeurs (une longueur par une durée)

$$v = \frac{d}{t}$$

Distance (en m, en km)

Temps (en s, en h)

Vitesse
(en m/s, en km/h)

- **le prix au kilogramme d'un produit** est le quotient du prix du produit par sa masse

en €

$$\text{Prix}_{\text{ du produit au kilogramme}} = \frac{\text{prix du produit}}{\text{masse du produit}}$$

en kg

en €/kg

b) grandeur produit :

définition : Lorsqu'on effectue le produit de deux grandeurs, on obtient **une grandeur produit.**

Ex : Soit un rectangle de longueur L et de largeur l
- **l'aire** est le produit de deux grandeurs (deux longueurs)

$$\mathcal{A} = L \times l$$

m²

m

m

c) changements d'unités :

cette lettre grecque se lit "ro"

Situation 1 :

La masse volumique d'un matériau est donnée par la formule $\boldsymbol{\rho = \frac{m}{v}}$ où m est la masse en kg et v le volume en m^3

La masse volumique de l'or est 19 300 kg/m^3.

Exprimez cette masse volumique en g/cm^3.

Solution :

On convertit la masse m = 19 300 kg = 19 300 000 g

et le volume v = 1 m^3 = 1 000 000 cm^3

d'où $\boldsymbol{\rho = \frac{19\,300\,000}{1\,000\,000} = 19{,}3\ g/cm^3}$

Situation 2 :

Calculer l'énergie électrique consommée E en kWh par un gaufrier de puissance P=700 W qui fonctionne pendant un temps t= 24 minutes.

L'énergie électrique est la grandeur produit de formule : **E = P x t**

Solution :

P = 700 W = 0,7 kW   t = 24 min = $\frac{24}{60}$ h = 0,4 h

D'où E = 0,7 x 0,4 = 0,28 kWh