

Théorème de Thalès et sa réciproque

Rappel : signification de « réciproque »

« Si un bâtiment **a un clocher** alors ce bâtiment **est une église** »

la réciproque est vraie

« Si un bâtiment **est une église** alors ce bâtiment **a un clocher** ».

En mathématiques, la réciproque de certaines propriétés est vraie :

Ex : « Si un quadrilatère **est un parallélogramme**, alors **ses diagonales se coupent en leur milieu** » et sa réciproque « Si **les diagonales** d'un quadrilatère **se coupent en leur milieu**, alors ce quadrilatère **est un parallélogramme** ».

I) Théorème de Thalès

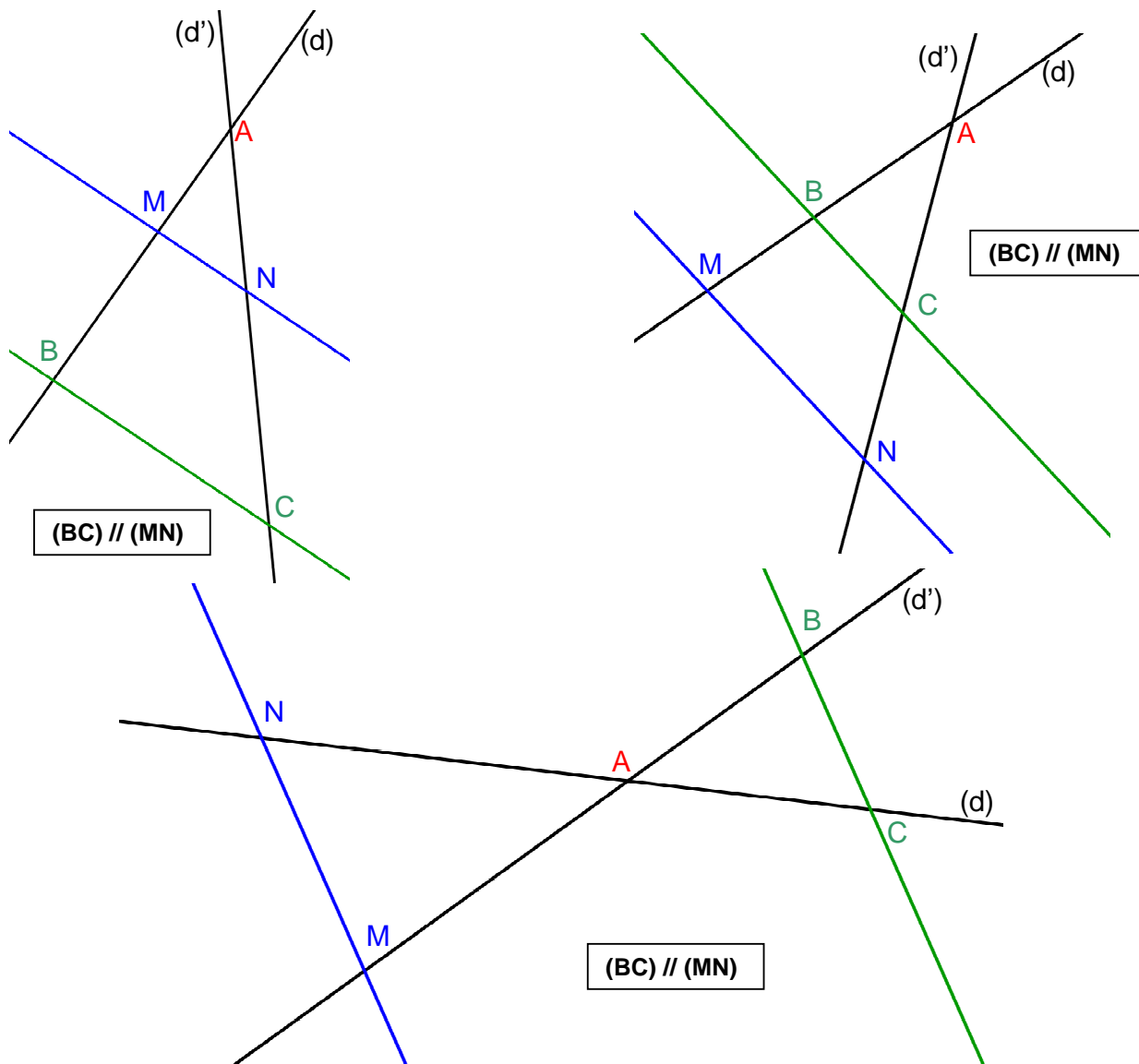
propriété :

Soient deux droites (d) et (d') sécantes en un point A.

Soient B et M deux points de (d) (distincts de A)

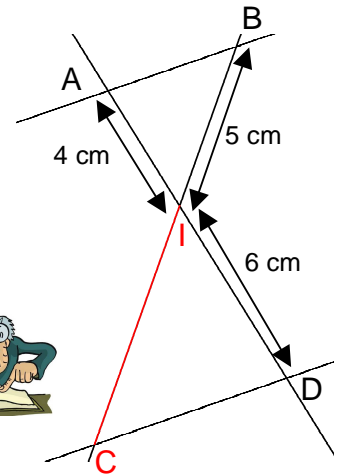
Soient C et N deux points de (d') (distincts de A)

Si les droites (BC) et (MN) sont **parallèles** alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$



Ex :

énoncé : Sur la figure ci-contre $(AB) \parallel (CD)$ et (AD) et (BC) sont sécantes en I. Calculez la longueur IC.



Calculons la longueur IC :

« j'écris les conditions me permettant d'utiliser la propriété de Thalès »

(AD) et (BC) sont sécantes en I et $(AB) \parallel (CD)$
donc d'après le théorème de Thalès

« j'écris ensuite l'égalité des trois rapports concernés par la propriété »

$$\frac{IA}{ID} = \frac{IB}{IC} = \frac{AB}{CD}$$

« je remplace par les valeurs connues et je garde les deux rapports utiles »

donc $\frac{4}{6} = \frac{5}{IC} = \frac{AB}{CD}$ ainsi, $\frac{4}{6} = \frac{5}{IC}$

« j'utilise l'égalité des produits en croix pour calculer IC »

donc $4 \times IC = 5 \times 6$

donc $IC = \frac{5 \times 6}{4} = 7,5 \text{ cm}$

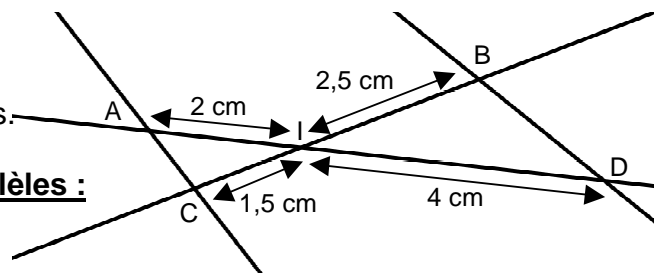
conséquence de la propriété de Thalès :

Soient deux droites (d) et (d') sécantes en un point A.
Soient B et M deux points de (d) (distincts de A)
Soient C et N deux points de (d') (distincts de A)

Si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles

Ex :

énoncé : Observez la figure ci-contre.
Montrez que (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.



Montrons que (AC) et (BD) ne sont pas parallèles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{IA}{ID} = \frac{2}{4} = 0,5 \\ \frac{IC}{IB} = \frac{1,5}{2,5} = 0,6 \end{array} \right.$$

« il s'agit donc de vérifier que la propriété de Thalès ne fonctionne pas avec les valeurs proposées !! »

donc $\frac{IA}{ID} \neq \frac{IC}{IB}$

donc les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.

II) Réciproque du théorème de Thalès

propriété :

Soient deux droites (d) et (d') sécantes en un point A.

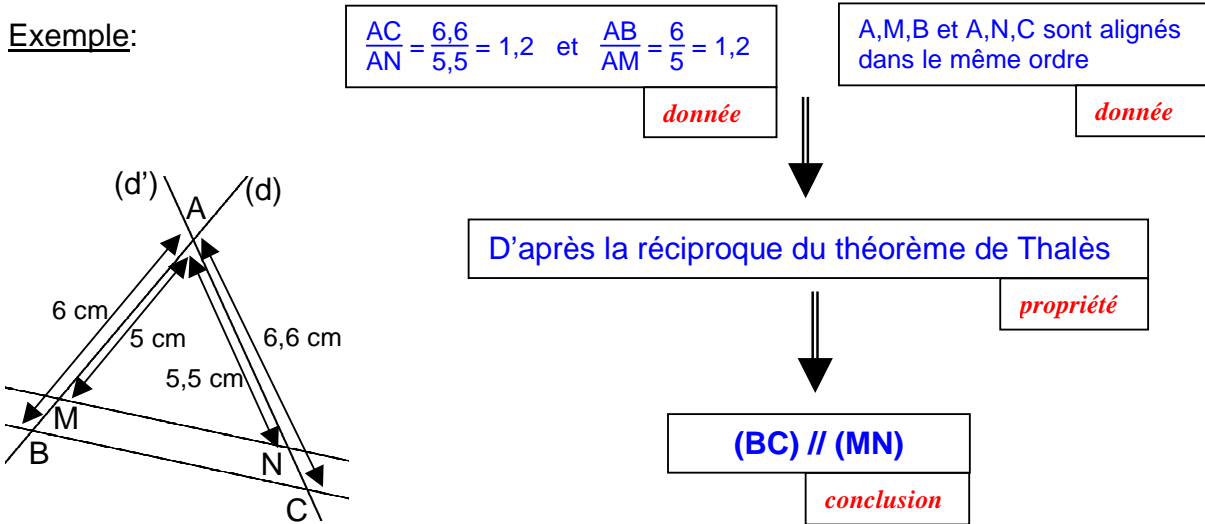
Soient B et M deux points de (d) (distincts de A)

Soient C et N deux points de (d') (distincts de A)

Si les points A, B, M et A, C, N sont alignés dans le même ordre, et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles

Exemple:



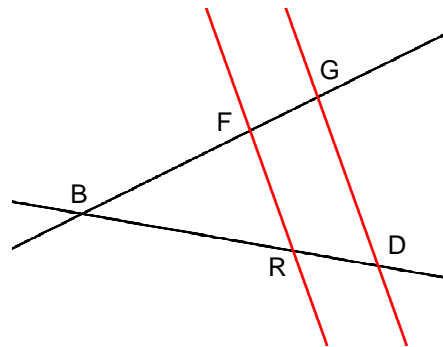
Ex :

énoncé : Sur la figure ci-contre

BG = 4,9 cm, BF = 3,5 cm

BD = 5,6 cm, BR = 4 cm

Démontrez que (RF) // (DG)



Démontrons que (RF) // (DG) :

Sur la figure, B, F, G et B, R, D sont alignés dans le même ordre.

De plus, $\frac{BD}{BR} = \frac{5,6}{4} = 1,4$ et $\frac{BG}{BF} = \frac{4,9}{3,5} = 1,4$

Donc, $\frac{BD}{BR} = \frac{BG}{BF}$

on peut aussi utiliser une accolade !

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{BD}{BR} = \frac{5,6}{4} = 1,4 \\ \frac{BG}{BF} = \frac{4,9}{3,5} = 1,4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{BD}{BR} = \frac{5,6}{4} = 1,4 \\ \frac{BG}{BF} = \frac{4,9}{3,5} = 1,4 \end{array} \right.$$



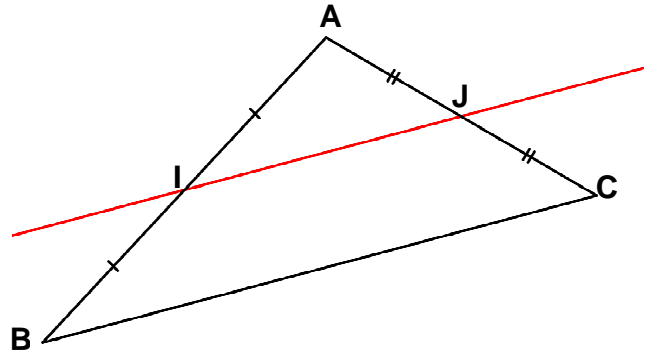
Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, (FR) // (GD)

Remarque : La propriété que nous avons vue en 4^{ème} « Si une droite passe par **les milieux** de deux côtés d'un triangle, alors elle est **parallèle** au **troisième** côté du triangle » est un cas particulier de la réciproque du théorème de Thalès

en effet :

A,I,B et A,J,C sont alignés dans le même ordre

$\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{1}{2}$ donc, d'après **la réciproque du théorème de Thalès**, (IJ) // (BC)



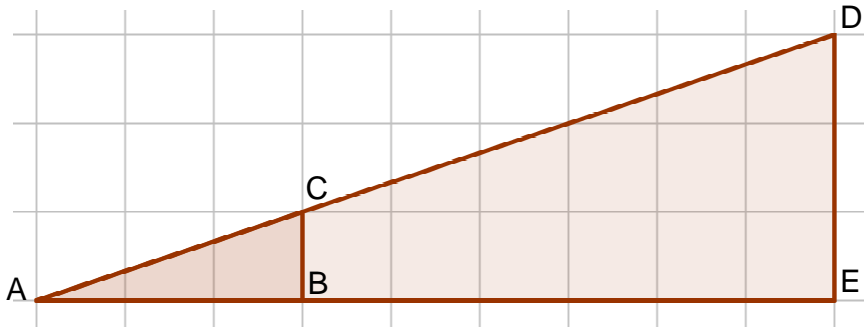
III) Agrandissement - Réduction

définition :

Quand on multiplie par un nombre k toutes les longueurs d'une figure :

- on obtient un **agrandissement** de la figure si k est strictement supérieur à 1 ($k > 1$)
- on obtient une **réduction** de la figure si k est compris strictement entre 0 et 1 ($0 < k < 1$)

Ex :



Le triangle ADE est un **agrandissement** du triangle ABC

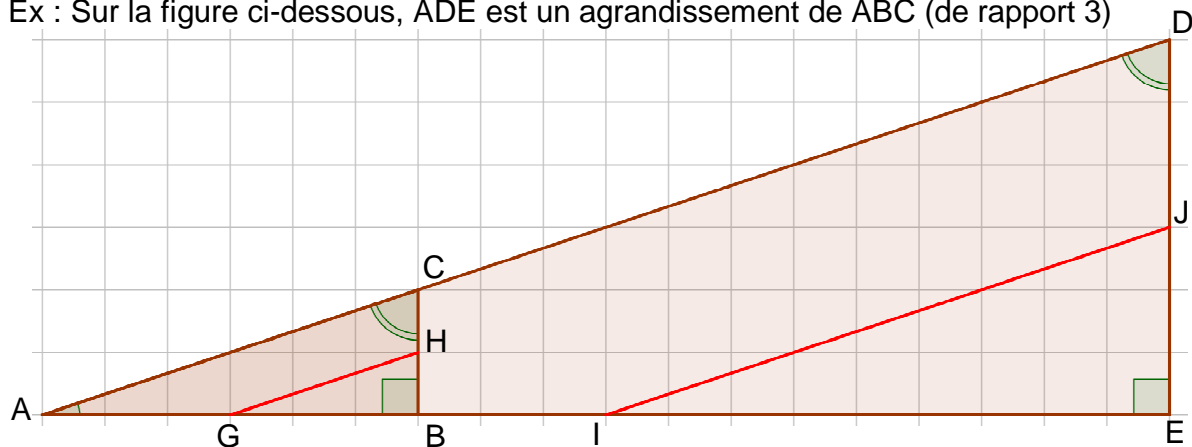
$$k = \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = 3$$

Le triangle ABC est une **réduction** du triangle ADE

$$k = \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} = \frac{1}{3} \approx 0,33..$$

propriété : Dans un **agrandissement** ou une **réduction**, les **mesures des angles sont conservées** (en conséquence, la perpendicularité et le parallélisme sont conservés)

Ex : Sur la figure ci-dessous, ADE est un agrandissement de ABC (de rapport 3)



$$\widehat{BAC} = \widehat{DAE} ; \quad \widehat{ACB} = \widehat{ADE} ; \quad \widehat{ABC} = \widehat{AED} = 90^\circ$$

« mesures des angles conservées ! »

« perpendicularité conservée ! »



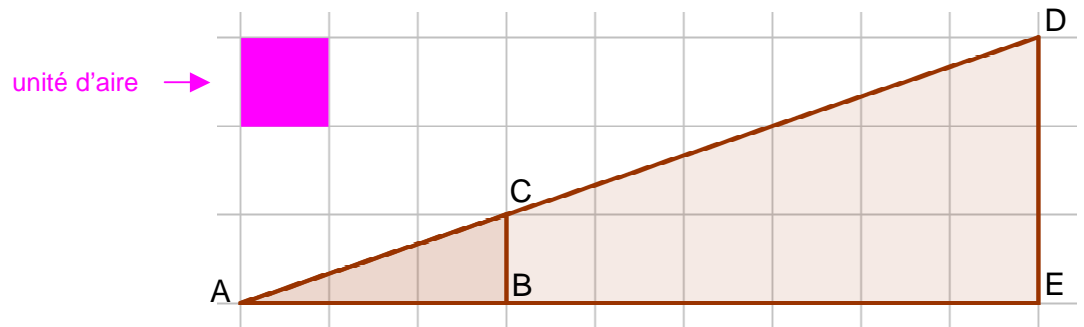
(GH) // (AC) et (IJ) // (AD)

« parallélisme conservé ! »

propriété : Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k ,

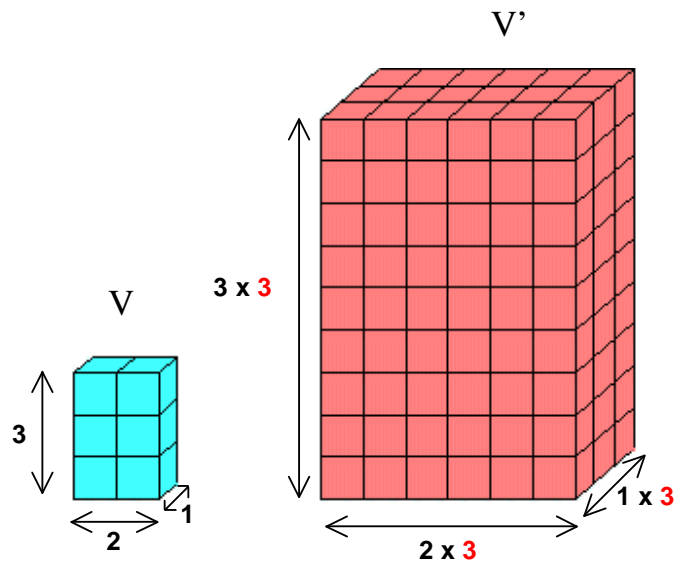
- l'aire d'une surface est multipliée par k^2
- le volume d'un solide est multiplié par k^3

Ex : Reprenons l'exemple précédent où ADE est un agrandissement de ABC (de rapport 3)



$$\text{Aire de ADE} = 3^2 \times \text{aire de ABC} = 3^2 \times \left(\frac{3 \times 1}{2} \right) = 13,5 \text{ unités d'aire}$$

Ex :



« toutes les longueurs du volume V ont été **multipliées par 3**. Le volume V' est **27 fois plus grand** que le volume V ! En effet $3^3 = 27$!!

