Équations

I) Mise en équation de problèmes :

► Voici l'énoncé d'un problème :

Le réservoir d'essence de ma voiture a **une capacité totale de 60 litres**.
Il manque **32 litres** d'essence pour qu'il soit plein.
Quelle **quantité d'essence** se trouve dans le réservoir ?

Pour simplifier notre recherche, nous allons « traduire » l'énoncé par une phrase mathématique.

Quantité d'essence inconnue + **32** = **60**

Pour simplifier davantage, je remplace la valeur inconnue par une lettre. Je choisis une lettre. x par exemple

$$\boxed{x + 32 = 60}$$

Le problème est traduit sous forme d'**une égalité avec une inconnue :** une **équation.**

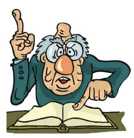
- La solution est facile à trouver. $x = 28$. Je vérifie que l'égalité est vraie en remplaçant x par 28.

En effet, **28 + 32 = 60**. **28 est donc bien la solution de l'équation**. Mon réservoir contenait donc 28 litres.

- Par contre, **10 n'est pas solution de l'équation**. **10** + 32 = 42 donc l'égalité est fausse, elle n'est pas vérifiée.

► Voici l'énoncé d'un second problème :

René a acheté une aubergine et pour 2,25 € de pommes.
Anaïs a acheté deux aubergines et pour 1,15 €, un melon.
Ils ont tous deux dépensé la **même** somme.
Quel est le prix d'une aubergine ?



Appelons x le prix d'une aubergine
On peut **traduire** cette situation par l' équation

$$\boxed{2x + 1,15 = x + 2,25}$$

Le problème a été mis sous forme d'**équation**
x est appelé l'**inconnue** de l'équation.
Nous allons par la suite apprendre une méthode pour trouver la valeur cherchée.

II) Équations :

définition : une équation est une égalité comportant un ou plusieurs nombres inconnus (souvent désignés par des lettres).
Les nombres inconnus sont nommés **les inconnues de l'équation**.

Ex : L'égalité $\underbrace{\mathbf{3}x + \mathbf{4}}_{\text{membre de gauche}} \mathbf{=} \underbrace{\mathbf{9}x - \mathbf{8}}_{\text{membre de droite}}$ est une équation d'inconnue x.

définition : les solutions d'une équation sont les valeurs des inconnues pour lesquelles l'égalité est vraie.
Trouver toutes les solutions d'une équation, c'est **résoudre l'équation**.

Ex : Reprenons l'exemple précédent.
Soit l'équation $\mathbf{3}x + \mathbf{4 = 9}x - \mathbf{8}$

2 est une solution de l'équation. En effet :

on remplace x par 2 dans le membre de gauche de l'équation
$\mathbf{3}x \mathbf{+ 4 = 3 \times 2 + 4 = 6 + 4 = 10}$

on remplace x par 2 dans le membre de droite de l'équation
$\mathbf{9}x \mathbf{- 8 = 9 \times 2 - 8 = 18 - 8 = 10}$

on obtient le même résultat dans chaque membre.
l'égalité est donc vraie. 2 est solution de l'équation

II) Égalités et opérations:

propriété : une **égalité reste vraie** si on **ajoute** (ou on **soustrait**) **le même nombre** à ses deux membres.

a, b, c désignent trois nombres relatifs, on a :

Si a = b alors a + c = b + c **Si a = b alors a – c = b – c**

Ex : Soit x un nombre relatif
- **Si** $x = 7$ **alors** $x + 4 = 7 + 4$ **donc** $x + 4 = 11$
- **Si** $x = -9$ **alors** $x - 2 = -9 - 2$ **donc** $x - 2 = -11$
- **Si** $x - 9 = 4$ **alors** $x \cancel{- 9} \cancel{+ 9} = 4 + 9$ **donc** $x = 13$

<u>propriété :</u> une **égalité reste vraie** si on **multiplie chaque membre de l'égalité** par un **même nombre.**

<u>a, b, c désignent trois nombres relatifs, on a :</u>

Si a = b alors a x c = b x c

<u>Ex :</u> Soit x un nombre relatif

- **Si** $x = -7$ **alors** $x \times 4 = -7 \times 4$ **donc** $x \times 4 = -28$
- **Si** $\frac{x}{5} = 3$ **alors** $\frac{x}{\cancel{5}} \times \cancel{5} = 3 \times 5$ **donc** $x = 15$

<u>propriété :</u> une **égalité reste vraie** si on divise **chaque membre de l'égalité** par un **même nombre non nul**

<u>a, b, c désignent trois nombres relatifs avec c ≠ 0, on a :</u>

Si a = b et c ≠ 0 alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

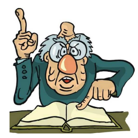
<u>Ex :</u> Soit x un nombre relatif

- **Si** $x = 5$ **alors** $\frac{x}{2} = \frac{5}{2}$ **donc** $\frac{x}{2} = 2{,}5$
- **Si** $-3x = 7$ **alors** $\frac{-3x}{-3} = \frac{7}{-3}$ **donc** $x = -\frac{7}{3}$

Dans une équation du premier degré, l'inconnue est de degré 1 (son exposant est 1). Supposons que l'inconnue soit x, on a donc x^1, c'est à dire x. Dans une équation au deuxième degré, l' inconnue peut être de degré 2 (x^2)

III) <u>Résoudre une équation du 1er degré (à une inconnue) :</u>

<u>Résolvons l'équation d'inconnue x suivante :</u>



$$3x + 9 = 7x - 2$$

« Pour rassembler les " x ", je retranche $7x$ à chaque membre »

$$\underbrace{3x - 7x}_{-4x} + 9 = \underbrace{7x - 7x}_{0} - 2$$

« Je réduis l'expression en effectuant les calculs avec les termes en " x " »

$$9 - 4x = -2$$

« Je rassemble les termes " sans x " en ajoutant –9 à chaque membre »

$$\underbrace{9 - 9}_{0} - 4x = \underbrace{-2 - 9}_{-11}$$

« Je réduis l'expression en effectuant les calculs avec les les termes " sans x " »

$$-4x = -11$$

« Je divise chaque membre par –4 pour qu'il ne reste plus que x dans le premier membre ! »

$$\frac{-4x}{-4} = \frac{-11}{-4}$$

$$x = \frac{-11}{-4} = \frac{11}{4}$$

Il faut faire en sorte que x soit seul dans le premier membre !!

Ex : Résolvons l'équation d'inconnue x suivante :

$$-5x + 4 = 15x - 9$$
$$-5x + 4 - 15x = 15x - 9 - 15x$$
$$-20x + 4 = -9$$
$$-20x + 4 - 4 = -9 - 4$$
$$-20x = -13$$
$$\boldsymbol{x} = \frac{-13}{-20} = \mathbf{\frac{13}{20}}$$

Ex : Résolvons l'équation d'inconnue m suivante :

$$3(2 - 5m) = 4m + 7 - (3m + 4)$$

En développant l'expression, les parenthèses seront supprimées!!

$$6 - 15m = 4m + 7 - 3m - 4$$
$$6 - 15m = m + 3$$
$$6 - 15m - m = m + 3 - m$$
$$6 - 16m = 3$$
$$6 - 16m - 6 = 3 - 6$$
$$-16m = -3$$
$$m = \frac{-3}{-16} = \frac{3}{16}$$

IV) Résoudre un problème à l'aide d'une équation :

énoncé :
Jacques et Lucien ont une collection de petites voitures. Jacques en a **12 de moins** que Lucien. Lucien en a **trois fois plus** que Jacques.
Combien de voitures possède Jacques ?

Notons x le nombre de voitures de Jacques

$\mathbf{3x = x + 12}$ ← Je **traduis** l'énoncé sous forme d'équation !

$3x - x = x + 12 - x$

Je **résous** l'équation !

$2x = 12$

$x = \frac{12}{2} = \mathbf{6}$

Jacques possède 6 voitures.