Proportionnalité

<u>Rappels</u> :

- "Le coût de l'achat de baguettes de pain est **proportionnel** au nombre de baguettes achetées. Si j'achète **deux fois plus** de baguettes, je paierai **deux fois plus**"

- Avec un **tableau de proportionnalité**, on obtient chaque nombre d'une ligne en multipliant le nombre correspondant de l'autre ligne **par un même nombre**.

  <u>Ex :</u> Voici une situation proportionnelle représentée sur ce tableau :

Nombre de boîtes	2	3	4
Masse en kg	**10**	**15**	**20**

x 0,2 x 5

Ce tableau est un **tableau de proportionnalité**.
2 x 5 = 10   3 x 5 = 15   4 x 5 = 20
Le **coefficient de proportionnalité** est **5** (masse d'une boîte)

Attention, **0,2** $\left(\frac{2}{10} \text{ ou } \frac{3}{15} \text{ ou } \frac{4}{20}\right)$ est aussi un **coefficient de proportionnalité** !

I) <u>Caractérisation graphique d'une situation proportionnelle :</u>

<u>Propriété :</u> si une situation est proportionnelle **alors** les points de sa représentation graphique sont alignés avec l'origine du repère.

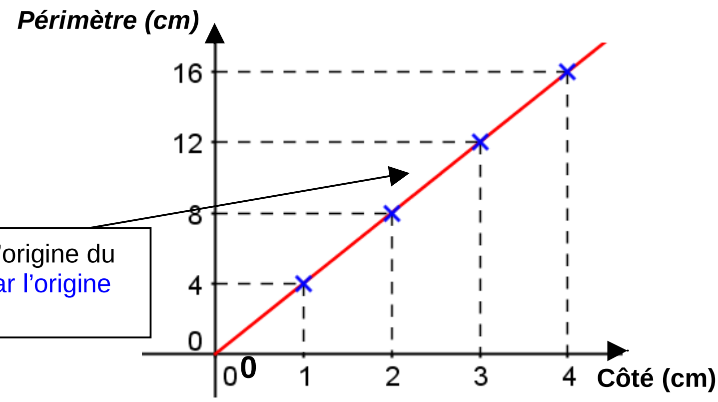
<u>Ex :</u> Le périmètre d'un carré est proportionnel à la longueur d'un côté.

Côté (cm)	0	1	2	3	4
Périmètre (cm)	**0**	**4**	**8**	**12**	**16**

x 4

<u>Traçons la représentation graphique</u>

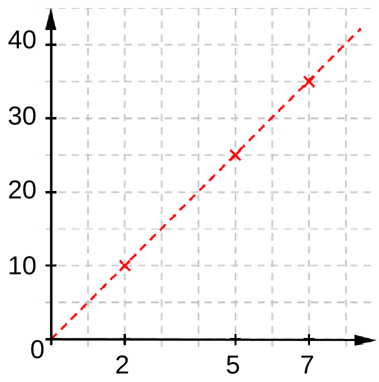
«Tous les points de la courbe sont alignés avec l'origine du repère. Nous avons obtenu une droite passant par l'origine du repère.



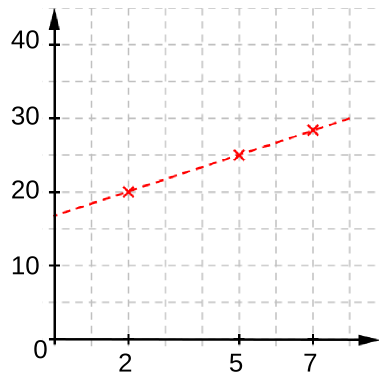
<u>Propriété :</u> si les points de sa représentation graphique sont alignés avec l'origine du repère **alors** la situation est proportionnelle.

Cette propriété est la **réciproque** de la précédente

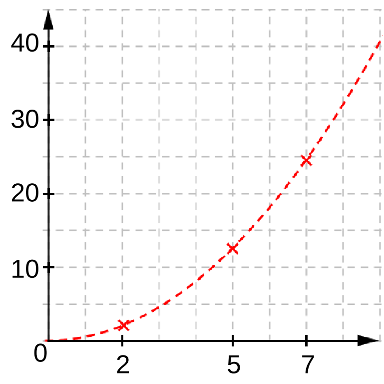
Ex :



graphique 1



graphique 2



graphique 3

▶ Seul **le graphique 1** correspond à une situation proportionnelle. **Les points sont alignés avec l'origine du repère.**

▶ Dans **le graphique 2**, **les points ne sont pas alignés avec l'origine du repère**. La situation n' est pas proportionnelle.

▶ Dans **le graphique 3**, **les points sont pas alignés**. La situation n' est pas proportionnelle.

II) Quatrième proportionnelle – égalité des produits en croix :

Reprenons la situation proportionnelle du paragraphe précédent.

Côté (cm)	0	1	2	3	4
Périmètre (cm)	**0**	**4**	**8**	**12**	**16**

x 4

On a : 2 x 12 = 3 x 8 = 24

1	**4**
4	**16**

On a : 1 x 16 = 4 x 4 = 16

Si on prend **deux colonnes quelconques** d'un tableau de proportionnalité, **les produits en croix** sont égaux.

Propriété : Si un tableau est un tableau de **proportionnalité** alors **les produits en croix** sont **égaux**

a, b, c, d désignent quatre nombres relatifs.
Le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité.

a	**c**
b	**d**

ad = **bc**

Cette propriété est appelée l'égalité des produits en croix.

Ex : Pour faire de la confiture de mirabelles, il faut ajouter 700g de sucre à 1 kg de fruits. Quelle est la quantité de sucre à ajouter à 750 g de fruits ?

La situation est proportionnelle (si j'utilise deux fois plus de fruits, je dois mettre deux fois plus de sucre !)

Soit x la quantité de sucre nécessaire

Fruits (g)	**1000**	**750**
Sucre (g)	**700**	x

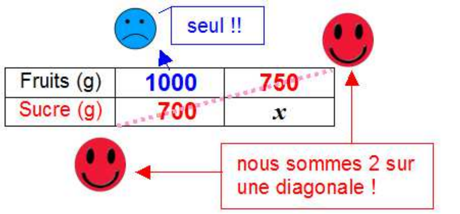
x est la **quatrième proportionnelle** (inconnue)

1000 x x = 750 x 700 (égalité des produits en croix)

Donc $x = \dfrac{750 \times 700}{1000}$ = **525g**

Pour 750g de fruits, il faudra 525g de sucre

Pour trouver la quatrième proportionnelle, je multiplie les deux nombres sur la diagonale puis je divise par le nombre qui est tout seul !



II) Pourcentages :

calculer un pourcentage revient à un calcul de proportionnalité

Ex : **Parmi les 24 élèves d'une classe, 9 sont demi-pensionnaires. Calculer le pourcentage d'élèves demi-pensionnaires dans la classe.**

Evaluer le **pourcentage** d'élèves demi-pensionnaires consiste à imaginer que la classe compte 100 élèves en conservant **la même proportion** d'élèves demi-pensionnaires.
Il s'agit bien d'une situation proportionnelle. Utilisons les produits en croix.

Soit x le pourcentage d'élèves

demi-pensionnaires	**9**	x
total des élèves	**24**	**1 00**

$x = \dfrac{9 \times 100}{24}$ = 37,5

Il y a 37,5% d'élèves demi-pensionnaires dans la classe.

Ex : **Un gâteau préparé par Julien contient 35% de chocolat. Quelle quantité de chocolat a t'il utilisé pour un gâteau de 425g ?**

Soit x la quantité de chocolat

masse de chocolat (g)	**35**	x
Masse du gâteau (g)	**100**	**425**

100 x x = 35 x 425 Donc $x = \dfrac{35 \times 425}{100}$ = **148,75g**

Pour un gâteau de 425g, il faudra 148,75g de chocolat.

III) Vitesse moyenne :

définition : la **vitesse moyenne** d'un objet en mouvement est le **quotient** de la **distance parcourue** par **la durée du parcours**.

C'est la vitesse qu'il aurait eu en parcourant la même distance en gardant toujours la même vitesse !

remarque : En supposant que l'objet en mouvement a **toujours la même vitesse** (la vitesse moyenne), la situation est proportionnelle.
La **distance parcourue** est **proportionnelle** à la **durée du parcours**.

Ex :

▶ **Un train circule pendant 4,5 heures à la vitesse moyenne de 70 km/h.**
Quelle est la distance parcourue ?

La situation est proportionnelle

Distance (en km)	**70**	x
Durée du parcours (en h)	**1**	**4,5**

$x = \frac{70 \times 4,5}{1}$ = **315 km**

La **distance parcourue** est **315 km**.

▶ **Un routier a effectué 252 km à 63 km/h de moyenne.**
Quelle est la durée du parcours ?

La situation est proportionnelle

Distance (en km)	**252**	63
Durée du parcours (en h)	x	**1**

$x = \frac{252 \times 1}{63}$ = **4 h**

La **durée du parcours** est **4 heures**.

▶ **Un automobiliste parcourt 280 km en 4 heures. Quelle est sa vitesse moyenne** ?

La distance parcourue est proportionnelle à la durée du parcours.

Distance (en km)	**280**	x
Durée du parcours (en h)	**4**	**1**

La **vitesse moyenne** en km/h correspond à **la distance parcourue en 1 heure**.

$x = \frac{280 \times 1}{4}$ = **70 km** donc la vitesse moyenne est **70km/h**