Applications du produit scalaire

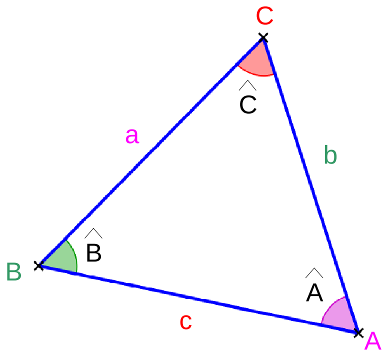
I) Théorème d'Al-Kashi :

Al-Kashi est un mathématicien et astronome iranien né vers 1380.
Ce théorème est appelé aussi théorème de Pythagore **généralisé** !

propriété :
Dans un triangle ABC (voir notations sur la figure),

on a :

- $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}}$
- $\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}}$
- $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}}$

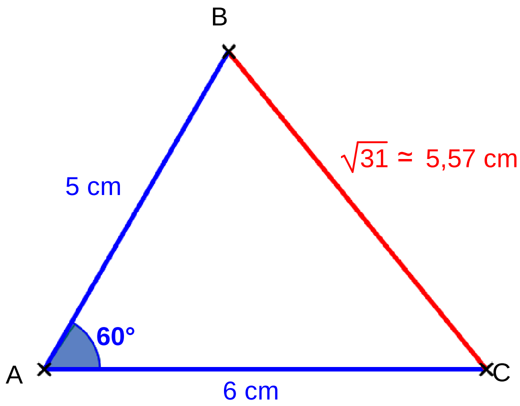


► ***démonstration***
Démontrons la première égalité (la démonstration est similaire pour les deux autres).

On a $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$
Or, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = AC \times AB \cos\widehat{A}$
Par suite, $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB\cos\widehat{A}$
Donc, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

Ex : Soit le triangle ABC tel que AB = 5 cm, AC = 6cm
Calculons BC.
D'après le théorème d'Al-Kashi,
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos 60°$
$\quad = 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times \frac{1}{2} = 31$

donc $BC = \sqrt{31} \simeq 5{,}57$ cm

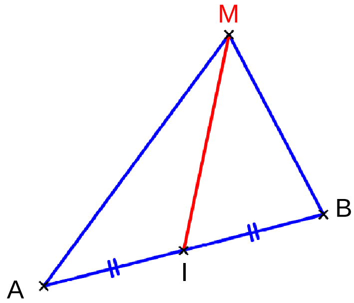


II) Théorème de la médiane :

propriété : Soient A et B deux points et I le milieu du segment [AB].

Pour tout point M,

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$



cette propriété fait intervenir la mesure MI de la médiane du triangle ABM issue de M.
D'où le nom de théorème de la médiane.

► ***démonstration***

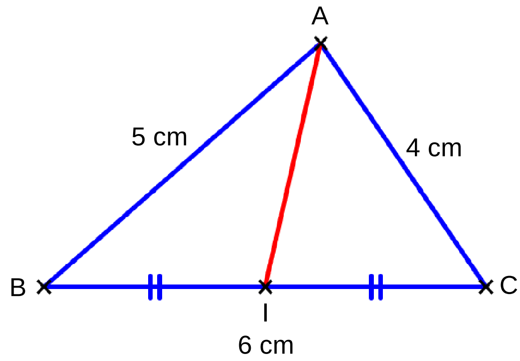
$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$

Or, $IA = IB = \frac{1}{2}AB$ donc $IA^2 = IB^2 = \frac{1}{4}AB^2$ De plus, $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0$

donc $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2 \times \frac{1}{4}AB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

<u>Ex :</u> Soit le triangle ABC avec BC = 6cm, AB = 5cm et AC = 4cm.
Soit I le milieu de [BC]. Calculer AI.
D'après le théorème de la médiane, on a



$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$

donc $5^2 + 4^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2} \times 6^2$

donc $25 + 16 = 2AI^2 + \frac{36}{2}$

donc $AI^2 = \frac{41 - 18}{2} = \frac{23}{2}$

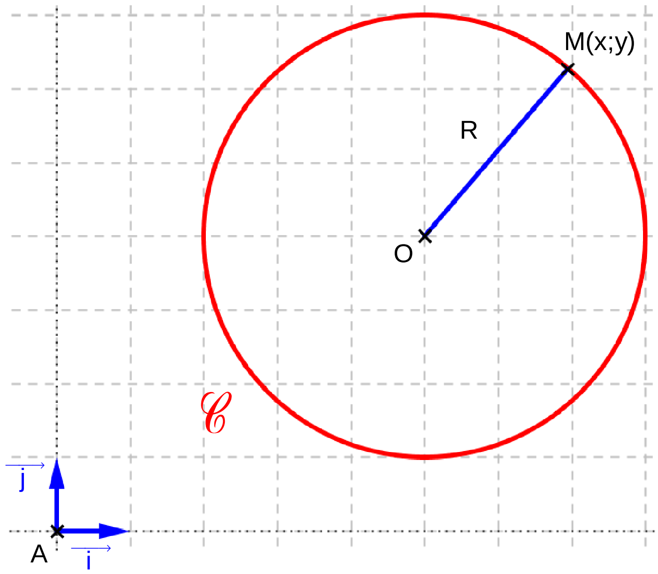
donc $AI = \sqrt{\frac{23}{2}} \simeq 3,39$ cm

III) Équation d'un cercle :

<u>propriété</u> : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$,
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O (x_O, y_O) et de rayon R, une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ est $(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = R^2$

► ***démonstration***

Soit M(x;y) un point d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre $O(x_0;y_0)$ et de rayon R
Par définition, OM = R donc $OM^2 = R^2$ donc $(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = R^2$



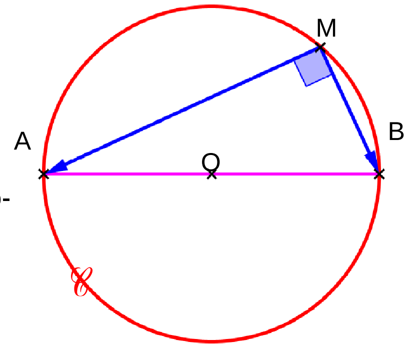
Dans l'exemple ci-contre, une équation du cercle $\mathscr{C}$ est : $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 3^2 = 9$

On pourrait très bien écrire d' autres équations de ce cercle. Par exemple :
$3(x - 5)^2 + 3(y - 4)^2 = 27$

propriété :

Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

autrement dit, M est un point du cercle $\mathscr{C}$ équivaut à $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$



► ***démonstration***

Soit M(x;y) un point d'un cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB]
Si M = A ou M = B, alors $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$
Si M ≠ A et M ≠ B, alors MAB est un triangle rectangle en M (propriété vue en 4ème)
donc $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux et $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

IV) Trigonométrie :

a) formules d'addition :

propriété : Pour tous les nombres réels a et b.

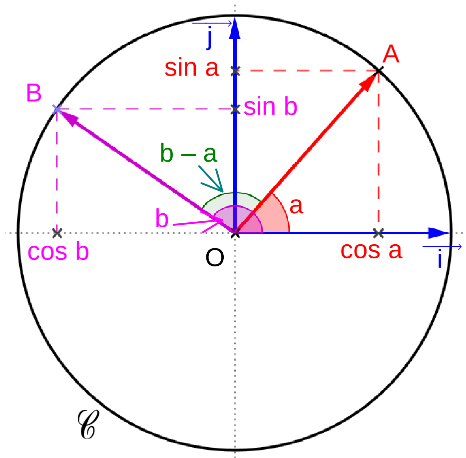
1. cos(a – b) = cosa cosb + sina sinb
2. cos(a + b) = cosa cosb – sina sinb
3. sin(a – b) = sina cosb – cosa sinb
4. sin(a + b) = sina cosb + cosa sinb

un repère orthonormé est direct si : $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = \frac{\pi}{2}$

Il est **indirect** si $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = -\frac{\pi}{2}$

► ***démonstration***

(1) Soit un repère orthonormé direct $(0 ; \overrightarrow{i} ; \overrightarrow{j})$,
Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O
A et B sont deux points du cercle tels que :
$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA}) = a$ et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OB}) = b$
On a donc $\overrightarrow{OA}$(cosa ; sina) et $\overrightarrow{OB}$(cosb ; sinb)
D' autre part, par application de la relation de Chasles aux angles orientés, on a
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{i}) + (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{i}) - (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{i})$
$= -a - (-b) = b - a$



Calculons de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ = cosa cos b + sina sinb
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ = OA x OB x cos (b – a) = cos (b – a) = cos (a – b)

Par suite, cos(a – b) = cosa cos b + sina sinb

On peut déduire les formules suivantes de la précédente.

(2) Si on remplace b par (–b), on a :
cos (a + b) = cos(a –(–b)) = cosa cos(–b) + sina sin(–b) = cosa cosb – sina sinb

(3) On sait que pour tout réel x, $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a + b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b$

$= \sin a \cos b + \cos a \sin b$

(4) Si on remplace b par (–b), on a :

$\sin(a - b) = \sin(a + (-b)) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

b) formules de duplication :

propriété : Soit un nombre réel a.

1. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
2. $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$
3. $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$
4. $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$

► ***démonstration***

(1) $\cos(2a) = \cos(a + a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$

$\cos^2 a - \sin^2 a = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$

(2) $\sin(2a) = \sin(a + a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a = 2 \sin a \cos a$

(3) D'après (1), on a $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

donc $2\cos^2 a = 1 + \cos(2a)$ et par suite, $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$

(4) D'après (1), on a $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$

donc $2\sin^2 a = 1 - \cos(2a)$ et par suite, $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$

Ex : On sait que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Calculer les cosinus et sinus de $\frac{\pi}{12}$ en utilisant les formules d'addition.On a :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$$