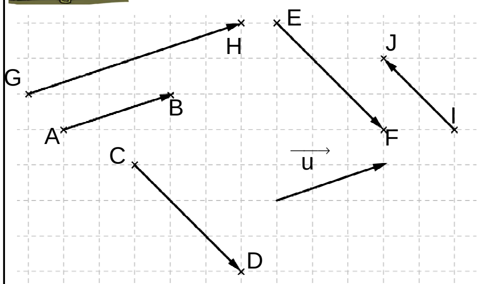
Colinéarité de vecteurs
Équations de droites

I) Colinéarité de deux vecteurs :

rappels et notion de colinéarité

Revenons à la notion du vecteur abordée en Seconde. Le vecteur permet de définir le déplacement d'un point en translation. Ce déplacement est caractérisé par une direction, un sens, une longueur.



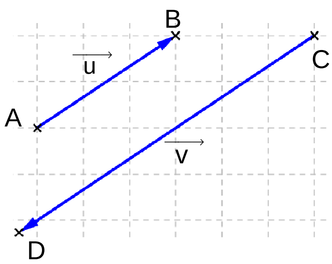
La translation qui transforme A en B est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Dans l'exemple ci-contre, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ puisque ces deux vecteurs caractérisent la même translation.
On a aussi $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$

L' adjectif **colinéaire** est composé de **co** (du latin *cum* : avec) et **linéaire** (du latin *linearis* : de ligne).
Deux vecteurs colinéaires caractérisent deux déplacements pouvant être effectués avec la même ligne droite.

Dans l'exemple ci-dessus, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont deux vecteurs colinéaires (des déplacements identiques caractérisés par ces deux vecteurs peuvent être effectués sur une même ligne droite).
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont également colinéaires. Par contre, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires.

définition :
Deux vecteurs non nuls sont colinéaires quand ils ont la même direction.

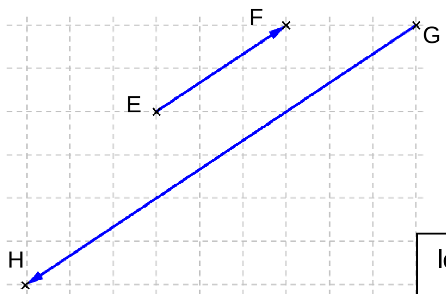
Ex : Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires



Les droites (AB) et (CD) sont parallèles !

propriété admise : Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\,\overrightarrow{v}$.

Ex :



$\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires

on dit aussi que $\overrightarrow{GH}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{EF}$

Ici, $\overrightarrow{GH} = -3\,\overrightarrow{EF}$ ou $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{GH}$

le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tout vecteur $\overrightarrow{u}$!

$\overrightarrow{0} = 0\,\overrightarrow{u}$

<u>propriété</u> : **"condition de colinéarité"**
Dans un repère, deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-x'y = 0$

► ***démonstration***
► **Supposons que $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont colinéaires. Démontrons que $xy'-x'y = 0$.**
D'après la propriété précédente, il existe un nombre réel k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.
En coordonnées, cela signifie $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$.
On a alors $xy' - x'y = xky - kxy = 0$
On a prouvé que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $xy'-x'y = 0$

► **Supposons que $xy' - x'y = 0$. Démontrons que $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont colinéaires.**
- si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$
- si $\vec{u} \neq \vec{0}$, une de ses coordonnées est non nulle. Supposons que ce soit x.

Posons $k = \frac{x'}{x}$, on a donc $x'=kx$.
$xy' - x'y = 0$ s'écrit $xy' - kxy = 0$ or $x \neq 0$ donc $y' - ky = 0$ donc $y' = ky$
On a prouvé qu'il existait un nombre k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$
Si $xy' - x'y = 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

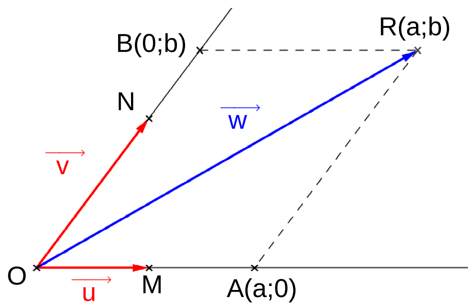
<u>Ex :</u> Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -14 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car :
$-14 \times 4 - 7 \times (-8) = -56 + 56 = 0$

Il est utile d'écrire verticalement les coordonnées. Elles sont proportionnelles. Pensez à la règle du produit en croix !! x k
$\begin{pmatrix} -14 \\ -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

II) <u>Décomposition d'un vecteur :</u>

a) <u>généralités :</u>
<u>propriété</u> : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.
Pour tout vecteur $\vec{w}$, il existe un couple unique (a;b) de nombres réels tels que : $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$

► ***démonstration***
► **montrons d'abord l'existence de la décomposition**

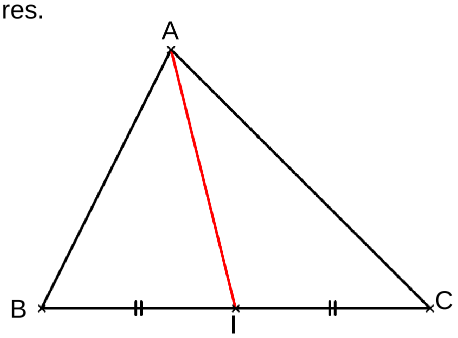


Soit un point O du plan.
Appelons M et N les points définis par $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$. ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc (O; M; N) constitue un repère du plan)
Soit un point R tel que $\overrightarrow{OR} = \vec{w}$. R a pour coordonnées (a;b).
Soient A(a;0) et B(0;b). On a $\overrightarrow{OA} = a\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OB} = b\overrightarrow{ON}$.
De plus, $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ (coordonnées de la somme de deux vecteurs)
donc $\overrightarrow{OR} = a\overrightarrow{OM} + b\overrightarrow{ON}$. Or, $\overrightarrow{OR} = \vec{w}$, $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$ donc $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$
On a prouvé l' existence de la décomposition.

► **montrons l'unicité de la décomposition**

Supposons qu'il existe deux expressions de $\vec{w}$ de ce type.
On aurait donc $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ et $\vec{w} = a'\vec{u} + b'\vec{v}$
alors $a\vec{u} - a'\vec{u} = b'\vec{v} - b\vec{v}$ ce qui revient à $(a - a')\vec{u} = (b' - b)\vec{v}$
Or, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc $a - a' = 0$ et $b - b' = 0$
Par suite, $a = a'$ et $b = b'$
On a prouvé l' unicité de la décomposition.

<u>Ex :</u>
Soit un triangle ABC et I le milieu de [BC]. $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Déterminons la décomposition de $\vec{AI}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$



On sait que cette décomposition existe et est unique.

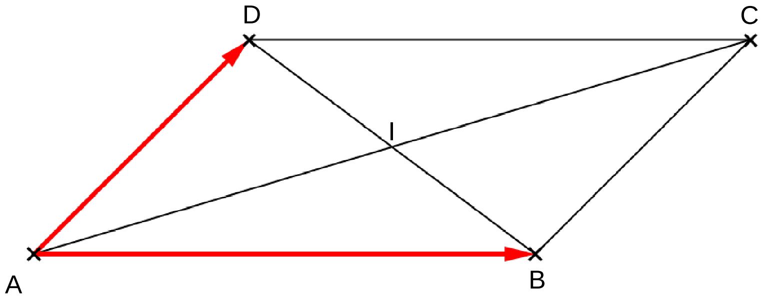
On a $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AI} + \vec{IB} + \vec{AI} + \vec{IC} = 2\vec{AI} + \vec{IB} + \vec{IC}$
or I est le milieu de [BC] donc $\vec{IB} = -\vec{IC}$
Par suite,
$\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AI}$
donc $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

b) <u>application au repère du plan :</u>

<u>définition</u> :
► Un point O et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ constitue un repère du plan.
On le note $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$

► Soit un point M du plan.
Par décomposition de $\vec{OM}$ à l'aide de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on obtient $\vec{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$
a et b sont les coordonnées de M dans le repère $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ constitué par le point O et les deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

<u>Ex :</u> Soit un parallélogramme ABCD. Soit I le milieu de [AC]



C a pour coordonnées (1;1) dans le repère $(A;\vec{AB};\vec{AD})$

D a pour coordonnées (0;1) dans le repère $(A;\vec{AB};\vec{AD})$

B a pour coordonnées (1;0) dans le repère $(A;\vec{AB};\vec{AD})$

I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} , \frac{1}{2}\right)$ dans le repère $(A;\vec{AB};\vec{AD})$.

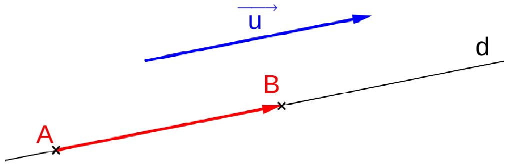
En effet, $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ donc $2\vec{AI} = \vec{AB} + \vec{AD}$ et par suite, $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$

III) <u>Equation cartésienne d'une droite :</u>

pourquoi cartésienne ?
L'équation de la droite est établie dans le plan muni d'un repère cartésien (constitué d'un point et deux vecteurs non colinéaires).
C'est le mathématicien René Descartes 1596 - 1650 qui est à l'origine de ce type de repère (d'où "cartésien")

a) vecteur directeur d'une droite :

définition :
Un vecteur directeur d'une droite d est un vecteur non nul $\vec{u}$ dont la direction est celle de la droite d.



- si C et D sont deux points distincts d'une droite d alors $\overrightarrow{CD}$ est un vecteur directeur de la droite
- si $\vec{v}$ est un vecteur d'une droite d alors k $\vec{v}$ (k≠0) est un vecteur directeur de d

propriété (conséquence de la définition): une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

b) équation cartésienne d'une droite :

a et b ne peuvent être nuls en même temps !

propriété : Dans un repère du plan,
toute droite d a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
Un vecteur directeur de d est le vecteur $\vec{u}(-b\ ;\ a)$

► ***démonstration***
Soit un point $A(x_0;y_0)$ sur une droite d de vecteur directeur $\vec{u}(r\ ;\ s)$.
Un point M(x;y) appartient à la droite d si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires (propriété précédente).

Or, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$.

Dire que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires revient à dire que $s(x - x_0) - r(y - y_0) = 0$
c'est à dire $sx - ry - s x_0 + r y_0 = 0$
Cette équation est bien de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = s$; $b = -r$ et $c = -s x_0 + r\ y_0$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-b;a)$ est bien un vecteur directeur de d.

définition : Une équation d'une droite de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ est appelée équation cartésienne de la droite d

d' après la propriété précédente, toutes les droites ont donc une équation cartésienne !