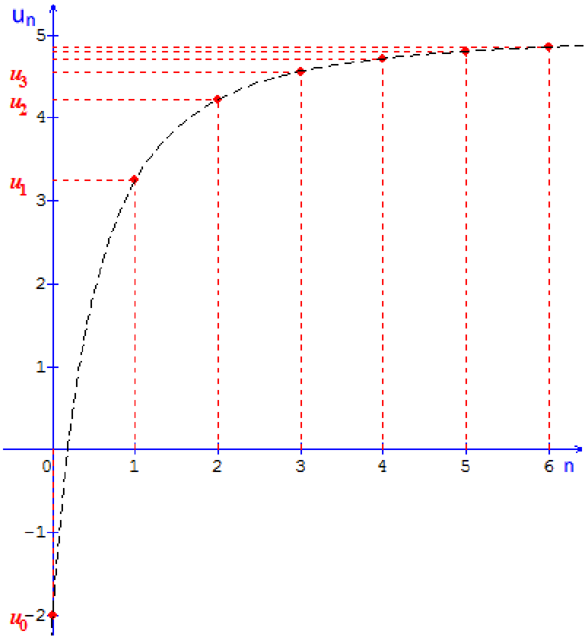
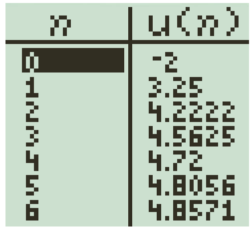
Comportement d'une suite

I) Approche de "sens de variation et de limite d'une suite" :

Soit la suite (u_n) telle que $u_n = 5 - \dfrac{7}{(n+1)^2}$

Représentons graphiquement la suite dans un plan muni d' un repère.
Il suffit de placer les points de coordonnées $(n;u_n)$





n	u(n)
0	-2
1	3.25
2	4.2222
3	4.5625
4	4.72
5	4.8056
6	4.8571

J'obtiens facilement les termes de la suite en utilisant la calculatrice graphique ! Je peux aussi les calculer moi même en utilisant la formule explicite :

$u_2 = 5 - \dfrac{7}{(2+1)^2} = 5 - \dfrac{7}{3^2} = \dfrac{45-7}{9} = \dfrac{38}{9} \simeq 4{,}22$

► Il semble que, plus n augmente, plus u_n augmente. On a $u_0 < u_1 < u_2$ ....
On peut conjecturer la façon dont la suite évolue, c'est à dire son sens de variation.
On dira ici que la suite (u_n) est croissante.

- Si les termes diminuent, on a $u_0 > u_1 > u_2$ .... on dit que la suite est décroissante.
- Elle sera dite constante si tous les termes sont égaux.

attention, certaines suites ne sont ni croissantes, ni décroissantes, ni constantes. Par exemple, $u_n = \cos(n)$

► Lorsque n augmente (on dit aussi qu'il tend vers $+\infty$), les termes se rapprochent de plus en plus de la valeur 5. On dit que la limite de la suite (u_n) est 5.

On écrit alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 5$

- Si u_n augmente autant qu'on veut quand n augmente, on dit que la suite tend vers $+\infty$ $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$
- Si u_n diminue autant qu'on veut quand n augmente, on dit que la suite tend vers $-\infty$ $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = -\infty$

attention, certaines suites n'ont pas de limite. Par exemple $u_n = (-1)^n$

II) Sens d'une variation de suite :

définition : une suite **(u_n)** est :

- strictement croissante si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$

Ex :
la suite (v_n) des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9.... est une suite strictement croissante
C'est la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison 2

- strictement décroissante si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_n > u_{n+1}$

Ex :
la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ des nombres 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$.... est une suite strictement décroissante

C'est la suite telle que $w_n = \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1

- constante si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_n = u_{n+1}$

on définit de la même façon une suite croissante ou décroissante en utilisant les inégalités au sens large. $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante car pour tout entier naturel n, $w_n \geqslant w_{n+1}$

définition : une suite (u_n) est monotone lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante.

Ex :
▶ les suites (v_n) et $(w_n)_{n\geqslant 1}$ définies précédemment sont monotones.
▶ la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=(-1)^n$ n'est pas monotone

III) Etudier le sens d'une variation de suite :

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$, il existe trois façons éventuelles de procéder :

▶ On peut étudier le signe de la **différence $u_{n+1} - u_n$**

- si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ alors la suite u_n est croissante
- si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ alors la suite u_n est décroissante

justification :
$u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ équivaut à $u_{n+1} \geqslant u_n$ et (u_n) est croissante
$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ équivaut à $u_{n+1} \leqslant u_n$ et (u_n) est décroissante

Ex : Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2 + \frac{1}{n+1}$

Etudions le sens de variation de (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \left(2 + \frac{1}{(n+1)+1}\right) - \left(2 + \frac{1}{n+1}\right) = 2 + \frac{1}{n+2} - 2 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} - \frac{n+2}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$$

$-1 < 0$ et $(n+1)(n+2) > 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est strictement décroissante

► On peut **comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1**

(uniquement si tous les termes de la suite sont **strictement positifs**)

- si, pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors la suite u_n est croissante
- si, pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ alors la suite u_n est décroissante

justification :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ équivaut à $u_{n+1} \geqslant u_n$ et u_n est donc croissante

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ équivaut à $u_{n+1} \leqslant u_n$ et u_n est donc décroissante

n'oublions pas que $u_n>0$!

Ex : Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{2^n}{3^{n+2}}$

Etudions le sens de variation de (u_n)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+3}}}{\frac{2^n}{3^{n+2}}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+3}} \times \frac{3^{n+2}}{2^n} = \frac{2}{3} \quad \text{or, } \frac{2}{3} < 1 \text{ donc } (u_n) \text{ est décroissante}$$

► Si la suite (u_n) est définie à l'aide d'une fonction f par **$u_n=f(n)$**, on peut utiliser le sens de variation de la fonction.

- si la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$, alors la suite est croissante
- si la fonction f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$, alors la suite est décroissante

justification :

- Si *f* est croissante sur $[0 ; +\infty[$,

$(n+1) \geqslant n$ équivaut à $f(n+1) \geqslant f(n)$ donc $u_{n+1} \geqslant u_n$ (la suite (u_n) est donc croissante)

- Si *f* est décroissante sur $[0 ; +\infty[$,

$(n+1) \leqslant n$ équivaut à $f(n+1) \leqslant f(n)$ donc $u_{n+1} \leqslant u_n$ (la suite (u_n) est donc décroissante)

Ex : Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n^2$

Etudions le sens de variation de (u_n)

La fonction u_n est définie par $u_n = f(n)$ avec $f(x) = 3x^2$

La fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc (u_n) est croissante.

propriété :

- une suite arithmétique de raison r est croissante si r>0 et décroissante si r<0
- la suite (v_n) telle que $v_n = q^n$ pour tout entier naturel n est croissante si q>1 et décroissante si 0<q<1

► **démonstration**

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Par définition, on a $u_{n+1} = u_n + r$ donc $u_{n+1} - u_n = r$

- si r > 0, on a $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite est croissante

- si r < 0, on a $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite est décroissante

- Soit (v_n) une suite telle que $v_n = q^n$ avec $q \neq 0$.

Par définition, on a $v_{n+1} = q^{n+1} = q^n \times q = v_n \times q$ donc $q = \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$

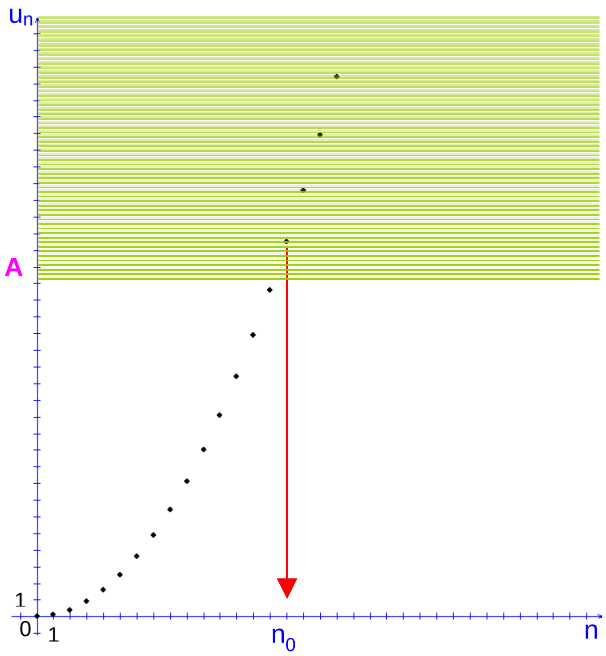
- si $q>1$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} > 1$ donc $v_{n+1} > v_n$ donc la suite est croissante

- si $0<q<1$, $0<\dfrac{v_{n+1}}{v_n}<1$ donc $v_{n+1} < v_n$ donc la suite est décroissante

IV) Notion de limite d'une suite :

a) suite ayant pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$) (limite infinie) :

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{n^2}{10}$



Je prends un nombre réel A, aussi grand que je le veux.

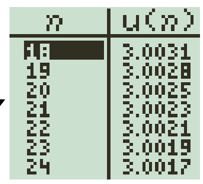
Je trouve alors un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite seront plus grands que A

Démontrer ce qui précède quel que soit le nombre A, c'est démontrer que les termes u_n de la suite sont tous aussi grands qu'on veut à condition de prendre n assez grand.

On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ et on note :

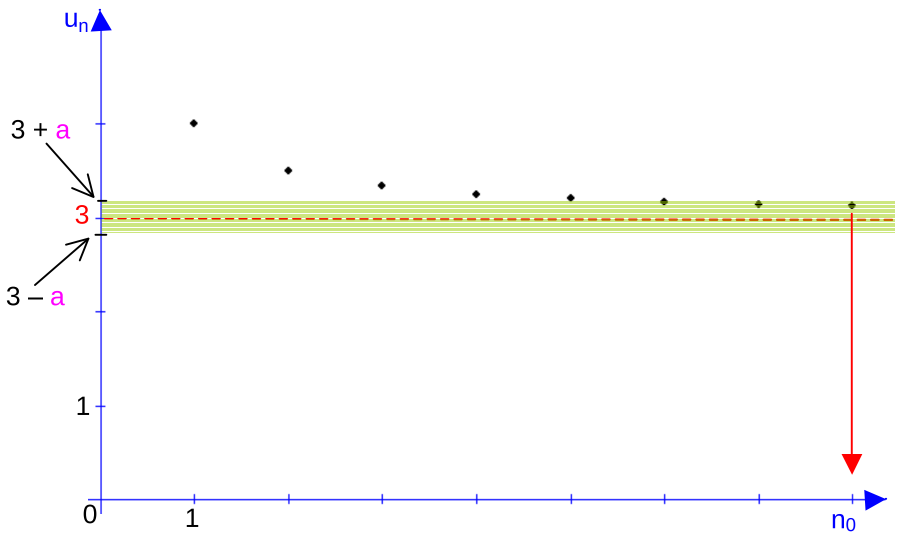
$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$$

De la même façon, on pourra montrer qu'une suite tend vers $-\infty$. Pour un nombre réel A (aussi petit qu'on veut), il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à A.



b) suite ayant pour limite un nombre réel (limite finie) :

Soit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{1}{n^2} + 3$



Je conjecture que la limite de la suite est 3 (à l'aide de ma calculatrice)

Je choisis un nombre réel positif a aussi petit que je veux !

Je trouve alors un rang n_0 à partir duquel **tous** les termes de la suite seront dans l'intervalle $]3 - a \;;\; 3 + a[$

Démontrer ce qui précède quel que soit le réel positif a, c'est démontrer que les termes u_n de la suite finissent par s'accumuler près de 3.

On dit que la suite (u_n) a pour limite 3 et on note :

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = 3$$

Certaines suites n'ont pas de limite !

Par exemple, la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par
$u_n = \cos(n)$