Étude de fonctions

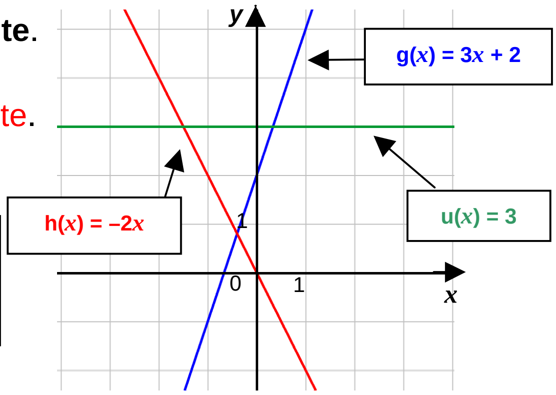
I) Fonctions de référence :

a) fonctions affines, fonction carré, fonction inverse (rappels) :

▶ **fonctions affines :** de formule algébrique $f(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

Elles sont définies sur $\mathbb{R}$ et représentées par une **droite**.

- Si $a > 0$ la fonction f est strictement croissante.
- Si $a < 0$ la fonction f est strictement décroissante.
- Si $a = 0$ la fonction f est constante.



La fonction h est appelée aussi fonction linéaire !
Dans sa formule algébrique, a = 0.
La droite passe par l'origine du repère !

▶ **fonction carré :** de formule algébrique $f(x) = x^2$

Elle est définie sur $\mathbb{R}$ et représentée par une **parabole**.

- la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$
- la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$

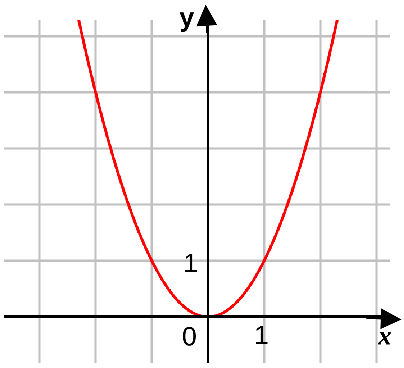


tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

▶ **fonction inverse :** de formule algébrique $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Elle est définie sur $\mathbb{R}^*$ et représentée par une **hyperbole**.

- la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$
- la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$

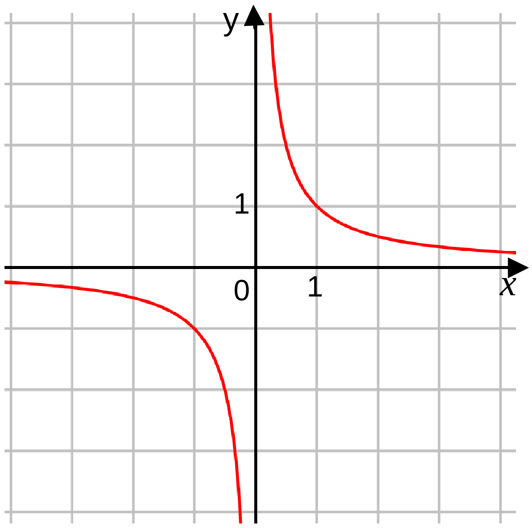


tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

définition : Une **fonction** f définie sur un intervalle I est dite monotone **sur I** si elle est croissante sur I **ou** alors si elle est décroissante sur I

Exemples :
une **fonction affine non constante** est monotone sur $\mathbb{R}$!
la **fonction carré** est monotone sur $[0\ ;\ +\infty[$ ou $]-\infty\ ;\ 0]$ mais elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$
la **fonction inverse** n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ (elle n'est pas définie sur tout l'ensemble des réels !)
Par contre, elle est monotone sur $]0\ ;\ +\infty[$ ou $]-\infty\ ;\ 0[$

b) fonction racine carrée :

► étude de la fonction :

Soit un nombre réel positif a, la racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$ est l'unique réel positif dont le carré vaut a.

$b = \sqrt{a}$ revient à écrire que $b \geqslant 0$ et $b^2 = a$!

Ex : $\sqrt{3}$ est l'unique réel positif dont le carré est 3. $(\sqrt{3})^2 = 3$

Le seul réel positif dont le carré est 36 est 6 donc $\sqrt{36} = 6$

définition :

la fonction **racine carrée** est la fonction f définie sur **[0 ; +∞[** par $f : x \longmapsto \sqrt{x}$

propriété :

la fonction racine carrée est **strictement croissante** sur [0 ; +∞[

► *démonstration*

Démontrer que la fonction racine carrée est strictement croissante c'est montrer que, quels que soient les réels a et b tels que $0 \leqslant a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

méthode 1 :

Soient deux réels a et b tels que $0 \leqslant a < b$.

Montrons que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$:

Les deux nombres positifs $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont rangés dans le même ordre que leurs carrés respectifs a et b (la fonction carré est strictement croissante sur [0 ; +∞[).

Donc, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

méthode 2 : Soient deux réels a et b tels que $0 \leqslant a < b$.

Montrons que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$:

Pour cela, comparons $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ en déterminant le signe de leur différence.

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

$\sqrt{b} + \sqrt{a}$ est appelée la quantité conjuguée de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

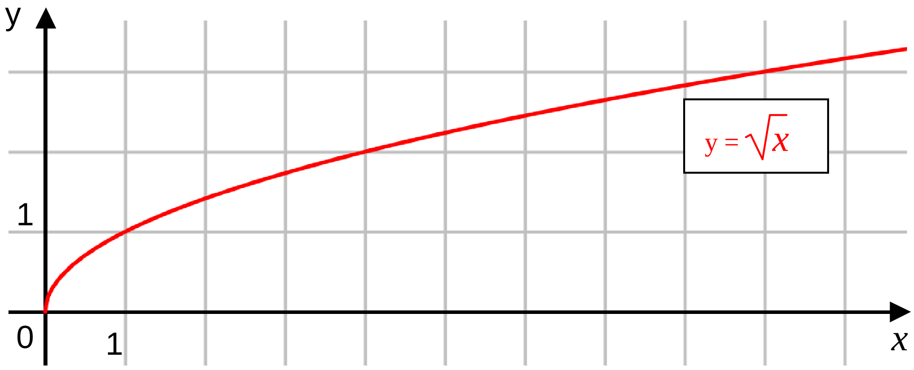
- On a par hypothèse $a < b$ donc $b - a > 0$
- D'autre part, $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $\sqrt{b} \geqslant 0$ donc $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$

Par suite, $\dfrac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$ est positif donc $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$ donc $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	

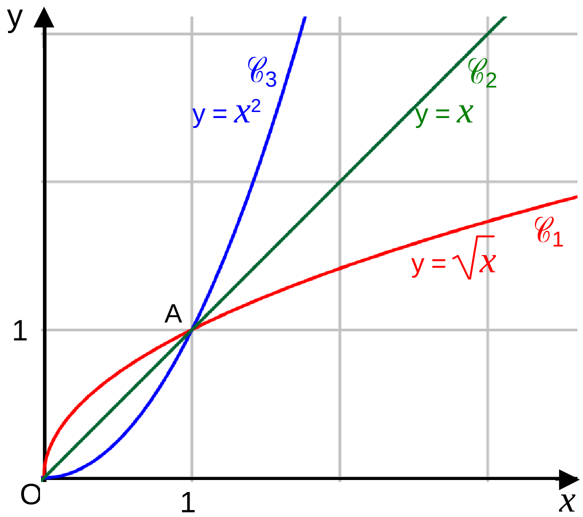
representation graphique :



sur beaucoup de logiciels comme geogebra par exemple, on obtient $\sqrt{x}$ par sqrt(x) (square (carrée) root (racine))

▶ **positions relatives des courbes représentatives de x, $\sqrt{x}$ et x^2 sur [0 ; +∞[:**

- les trois courbes sont concourantes en deux points O(0;0) et A(1;1)
- dans un repère orthonormé les courbes $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_1$ sont symétriques par rapport à $\mathscr{C}_2$



- **Si $x \in$]0;1[**, la courbe $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de $\mathscr{C}_2$, elle même au-dessus de $\mathscr{C}_3$.

justification :

On a $0<x<1$
donc $0 \times x < x \times x < 1 \times x$ (x est positif)
donc $0 < x^2 < x$ ($\mathscr{C}_2$ au-dessus de $\mathscr{C}_3$)
donc $\sqrt{0} < \sqrt{x^2} < \sqrt{x}$ ($\sqrt{x}$ croissante)
donc $0 < x < \sqrt{x}$ ($\mathscr{C}_1$ au-dessus de $\mathscr{C}_2$)

- **Si x > 1**, la courbe $\mathscr{C}_3$ est au-dessus de $\mathscr{C}_2$, elle même au-dessus de $\mathscr{C}_1$.

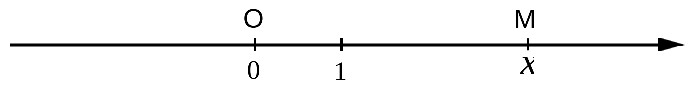
justification :

On a $x>1$
donc $x \times x > 1 \times x$ (x est positif)
donc $x^2 > x$ ($\mathscr{C}_3$ au-dessus de $\mathscr{C}_2$)
donc $\sqrt{x^2} > \sqrt{x}$ ($\sqrt{x}$ croissante)
donc $x > \sqrt{x}$ ($\mathscr{C}_2$ au-dessus de $\mathscr{C}_1$)

c) fonction valeur absolue :

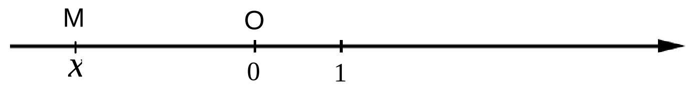
définition : Soit une droite graduée d'origine O. Si M est le point d'abscisse x, alors la valeur absolue de x notée $| x |$ est la distance OM

- $x \geqslant 0$



OM = $|x| = x - 0 = x$

- $x \leqslant 0$



OM = $|x| = 0 - x = -x$

Ex : $| 4,2 | = 4,2$ $\qquad | -67 | = 67$ $\qquad | 2 - \sqrt{17} | = \sqrt{17} - 2$

propriété : Pour tout réel x,

▶ $| x | \geqslant 0$ $\qquad$ ▶ $| x | = | -x |$

▶ **démonstration**

- Une distance est positive donc, par définition, $|x| \geqslant 0$
- Soient M d'abscisse x et M' d'abscisse $-x$ sur une droite graduée d'origine O.

M et M' sont symétriques par rapport à O donc OM = OM'. Par suite, $| x | = | -x |$

définition :

la fonction **valeur absolue** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto | x |$

propriété :

la fonction **valeur absolue** est **strictement décroissante sur]–∞ ; 0]** et **strictement croissante sur [0 ; +∞[**

▶ **démonstration**

fonction affine de type ax + b avec a > 0

Si $x \geqslant 0$, $f(x) = | x | = x$ donc f est croissante

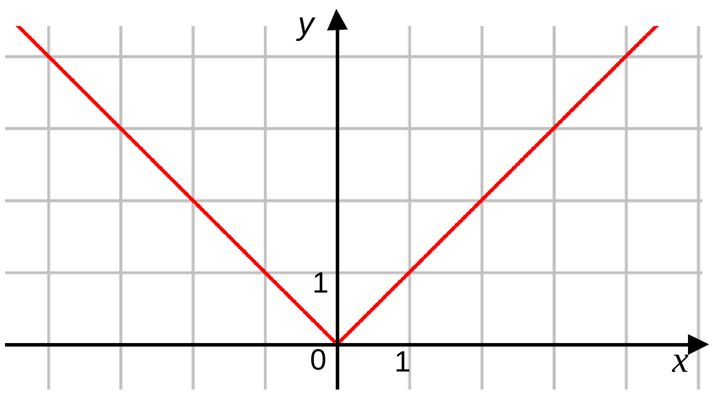
Si $x \leqslant 0$, $f(x) = | x | = -x$ donc f est décroissante

fonction affine de type ax + b avec a < 0

représentation graphique :

La courbe représentative de la fonction est la réunion des demi-droites d'équations :

$y = x$ sur $[0 ; +\infty[$ et $y = -x$ sur $]-\infty ; 0[$

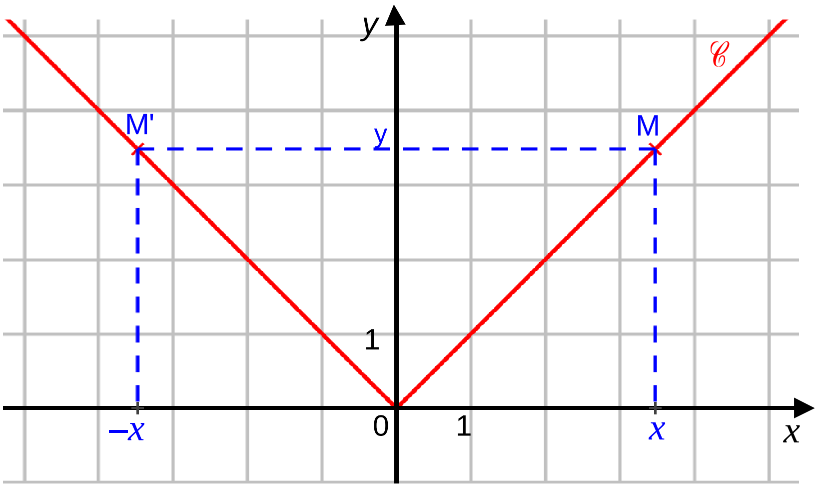


propriété : Dans un repère orthogonal, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction valeur absolue est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

► **démonstration**

Soit M(x,y) un point de la courbe $\mathscr{C}$, montrons que son symétrique M' par rapport à l'axe des ordonnées appartient à $\mathscr{C}$.

M' a pour coordonnées ($-x$,y)
Or, M$\in \mathscr{C}$ donc y = | x | = | $-x$ |
donc le point M'($-x$,y) appartient à la courbe $\mathscr{C}$.
Par suite, la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

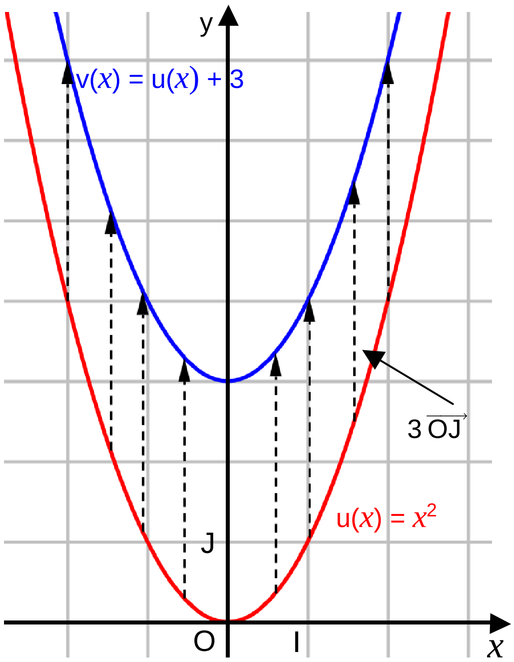


II) Opérations sur une fonction et sens de variation :

a) somme d'une fonction et d'un nombre constant :

définition : Soit une fonction u définie sur un intervalle I, soit k un nombre réel fixé.
La fonction u + k est la fonction v définie sur I par v(x) = u(x) + k

Ex : Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par u(x) = x^2
La fonction u + 3 est la fonction v telle que v(x) = x^2 + 3



Dans un repère (O,I,J) du plan, la courbe représentative de v se déduit de celle de u par une translation de vecteur $3\overrightarrow{OJ}$.
Plus généralement, la fonction u + k se déduit de celle de u par une translation de vecteur $k\overrightarrow{OJ}$.

propriété : Soit une fonction u définie sur un intervalle I, soit k un nombre réel fixé.
Les fonctions u et u + k ont les mêmes variations sur I.

► **démonstration**
1er cas : u est une fonction croissante
Soient a et b deux nombres réels de l'intervalle I

- si $a < b$ alors $u(a) \leqslant u(b)$, par suite $u(a) + k \leqslant u(b) + k$

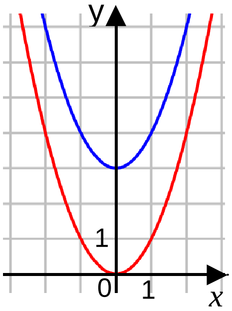
donc u + k est croissante

2ème cas : u est une fonction décroissante
Soient a et b deux nombres réels de l'intervalle I

- si $a < b$ alors $u(a) \geqslant u(b)$, par suite $u(a) + k \geqslant u(b) + k$

donc u + k est décroissante

Ex : Reprenons l'exemple précédent. Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$
La fonction u + 3 est la fonction v telle que $v(x) = x^2 + 3$



La fonction $u : x \longmapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$
donc la fonction $v : x \longmapsto x^2 + 3$ est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$

b) multiplication d'une fonction par un nombre constant :

définition : Soit une fonction u définie sur un intervalle I, soit k un nombre réel fixé.
La fonction ku est la fonction v définie sur I par $v(x) = ku(x)$

propriété : Soit une fonction u définie sur un intervalle I, soit k un nombre réel fixé.

- si $k > 0$, Les fonctions u et ku ont les mêmes variations sur I.
- si $k < 0$, Les fonctions u et ku ont des variations opposées sur I

► **démonstration**
Soient a et b deux nombres réels de l'intervalle I tels que $a < b$
1er cas : $k > 0$

- si u est croissante,

alors $u(a) \leqslant u(b)$, par suite $ku(a) \leqslant ku(b)$ donc ku est croissante sur I

- si u est décroissante,

alors $u(a) \geqslant u(b)$, par suite $ku(a) \geqslant ku(b)$ donc ku est décroissante sur I

2ème cas : $k < 0$

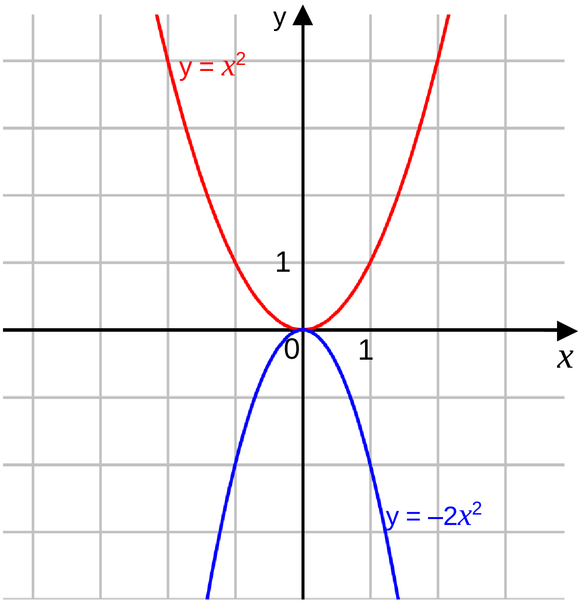
- si u est croissante,

alors $u(a) \leqslant u(b)$, par suite $ku(a) \geqslant ku(b)$ donc ku est décroissante sur I

- si u est décroissante,

alors $u(a) \geqslant u(b)$, par suite $ku(a) \leqslant ku(b)$ donc ku est croissante sur I

Ex : Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$
La fonction – 2u est la fonction v telle que $v(x) = -2x^2$
La fonction $u : x \longmapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$
donc la fonction $v : x \longmapsto -2x^2$ est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; +\infty[$



tableaux de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u(x)$		↘	0	↗	
$-2u(x)$		↗	0	↘	

attention ! Il n' existe pas de propriété générale permettant de connaître le sens de variation de la somme ou du produit de deux fonctions !
Les tableaux de variations de u et v ne permettent pas de déduire ceux de u + v ou uv !!

c) racine carrée d'une fonction :

définition : Soit une fonction u définie sur un intervalle I telle que pour tout nombre x de I, $u(x)$ est positif.
La fonction $\sqrt{u}$ est la fonction v définie sur I par $v(x) = \sqrt{u(x)}$

propriété : Soit une fonction u définie sur un intervalle I telle que pour tout nombre x de I, $u(x)$ est positif. Les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations sur I

► **démonstration**
Supposons que la fonction u est croissante sur I
Soient a et b deux nombres réels de l'intervalle I tels que a < b
On a $u(a) \leqslant u(b)$ (u est croissante sur I)
donc $\sqrt{u(a)} \leqslant \sqrt{u(b)}$ ($u(a) \geqslant 0$ et $u(b) \geqslant 0$ et la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$)
La fonction $\sqrt{u}$ est donc croissante sur I

Supposons que la fonction u est décroissante sur I
Soient a et b deux nombres réels de l'intervalle I tels que a < b
On a $u(a) \geqslant u(b)$ (u est décroissante sur I)
donc $\sqrt{u(a)} \geqslant \sqrt{u(b)}$ ($u(a) \geqslant 0$ et $u(b) \geqslant 0$ et la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$)
La fonction $\sqrt{u}$ est donc décroissante sur I

Ex : Soit la fonction u définie sur ℝ par $u(x) = x^2 - 4$. Etudions les variations de $\sqrt{u}$.
u est croissante sur [0 ; +∞[et décroissante sur]–∞ ; 0]

pensez à une des propriétés précédentes !
u et u + k varient de la même façon !

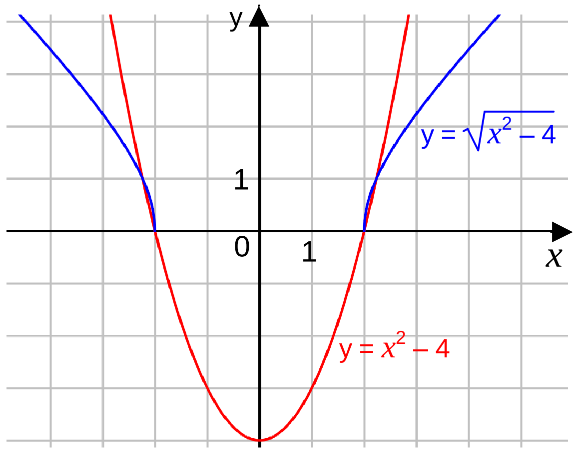
$\sqrt{u}$ n'est définie que pour x appartenant à]–∞ ; –2] ∪ [2 ; +∞[

il faut que $u(x)$ soit positif pour que $\sqrt{u(x)}$ soit défini !

Donc, $\sqrt{u}$ est décroissante sur]–∞ ; –2] et croissante sur [2 ; +∞[

tableaux de variations :

x	–∞		–2		0		2		+∞
$u(x)$		↘			–4	↗			
$\sqrt{u(x)}$		↘	0				0	↗	



d) inverse d'une fonction :

définition : Soit une fonction u définie sur un intervalle I telle que pour tout nombre x de I, $u(x) \neq 0$.
La fonction $\frac{1}{u}$ est la fonction v définie sur I par $v(x) = \frac{1}{u(x)}$

propriété : Soit une fonction u définie sur un intervalle I telle que pour tout nombre x de I, $u(x) \neq 0$. Les fonctions u et $\frac{1}{u}$ ont des variations opposées sur I.

► **démonstration**
Supposons que la fonction u est décroissante sur I
Soient a et b deux nombres réels de l'intervalle I tels que a < b
On a $u(a) \geqslant u(b)$ (u est décroissante sur I)
Or, u ne s'annule pas sur I donc $u(a) > 0$ et $u(b) > 0$ ou $u(a) < 0$ et $u(b) < 0$
► si $u(a) > 0$ et $u(b) > 0$ alors $\frac{1}{u(a)} \leqslant \frac{1}{u(b)}$ (la fonction inverse est décroissante sur [0; +∞[)
► si $u(a) < 0$ et $u(b) < 0$ alors $\frac{1}{u(a)} \leqslant \frac{1}{u(b)}$ (la fonction inverse est décroissante sur]–∞ ; 0])
La fonction $\frac{1}{u}$ est donc croissante sur I

<u>Supposons que la fonction u est croissante sur I</u>

Soient a et b deux nombres réels de l'intervalle I tels que a < b

On a u(a) $\leqslant$ u(b) (u est croissante sur I)

Or, u ne s'annule pas sur I donc u(a) > 0 et u(b) > 0 ou u(a) < 0 et u(b) < 0

► si u(a) > 0 et u(b) > 0 alors $\frac{1}{u(a)} \geqslant \frac{1}{u(b)}$ (la fonction inverse est décroissante sur [0; +∞[)

► si u(a) < 0 et u(b) < 0 alors $\frac{1}{u(a)} \geqslant \frac{1}{u(b)}$ (la fonction inverse est décroissante sur]–∞ ; 0])

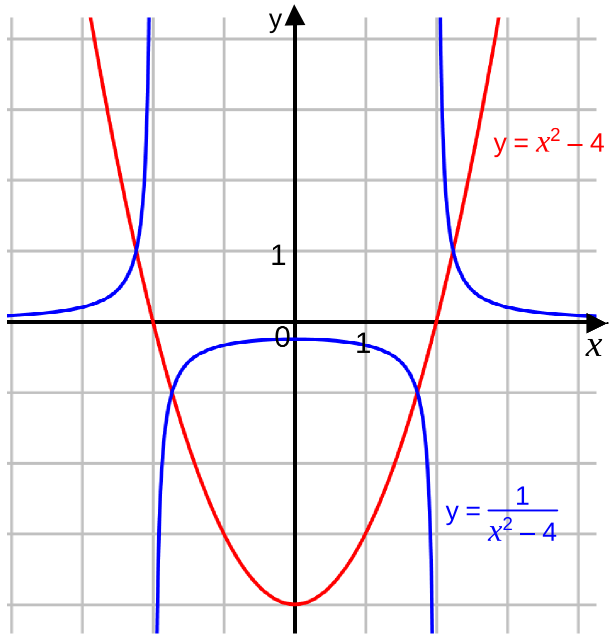
La fonction $\frac{1}{u}$ est donc décroissante sur I

<u>Ex :</u> Reprenons l'exemple précédent.

Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par u(x) = x^2 – 4. Etudions les variations de $\frac{1}{u}$.

u est croissante sur [0 ; +∞[et décroissante sur]–∞ ; 0]

La fonction $\frac{1}{u}$ est définie sur $\mathbb{R}$ – {–2; 2}



<u>tableaux de variations :</u>

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
u(x)		↘		↘	– 4	↗		↗	
$\frac{1}{u(x)}$		↗	‖	↗	$-\frac{1}{4}$	↘	‖	↘	