opérations sur les fonctions dérivées
applications de la dérivation

<u>rappels :</u>

fonction	domaine de définition	domaine sur lequel la fonction est dérivable	fonction dérivée
fonction constante : $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
fonction affine : $f(x) = ax + b$ ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
fonction carré : $f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
fonction puissance : $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
fonction inverse : $f(x) = \dfrac{1}{x}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
fonction racine : $f(x) = \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	$]0 ; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

le domaine de définition peut être différent du domaine de dérivabilité !

I) <u>Opérations sur les fonctions dérivées :</u>

a) <u>dérivée de la fonction $u + v$:</u>

<u>propriété</u> : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
La fonction somme u + v est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$

► **démonstration**

a et a + h sont deux nombres réels appartenant à I

<u>Exprimons le taux d' accroissement de u + v entre a et a+h :</u>

$$\frac{(u + v)(a + h) - (u + v)(a)}{h} = \frac{u(a + h) - u(a)}{h} + \frac{v(a + h) - v(a)}{h}$$

- $\dfrac{u(a + h) - u(a)}{h}$ tend vers u'(a) quand h tend vers 0 (u est dérivable sur I)

- $\dfrac{v(a + h) - v(a)}{h}$ tend vers v'(a) quand h tend vers 0 (v est dérivable sur I)

donc $\dfrac{(u + v)(a + h) - (u + v)(a)}{h}$ tend vers u'(a) + v'(a) quand h tend vers 0

donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(u + v)(a + h) - (u + v)(a)}{h} = u'(a) + v'(a)$

donc u + v est dérivable sur I et (u + v)' = u' + v'

<u>Ex :</u> Soit la fonction w définie sur $]0 ; +\infty[$ par $w(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

w est la somme de deux fonctions u et v définies et dérivables sur $]0 ; +\infty[$ par $u(x) = x^2$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$

donc w est dérivable sur I et $w'(x) = u'(x) + v'(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$

b) dérivée de la fonction u x v :

propriété : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
La fonction produit u x v est dérivable sur I et $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

► **démonstration**

a et a + h sont deux nombres réels appartenant à I

Exprimons le taux d' accroissement de u x v entre a et a+h :

ce terme est retranché puis ajouté pour faciliter la démonstration !

$$\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h)\,v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$$

$$= \frac{u(a+h)\,v(a+h) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}$$

$$= \frac{(u(a+h)-u(a))v(a+h) + u(a)(v(a+h)-v(a))}{h}$$

$$= \frac{u(a+h)-u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

- $\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$ tend vers u'(a) quand h tend vers 0 (u est dérivable sur I)
- $\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$ tend vers v'(a) quand h tend vers 0 (v est dérivable sur I)
- v(a + h) tend vers v(a) quand h tend vers 0 (*admis*)

donc $\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}$ tend vers u'(a)v(a) + u(a)v'(a) quand h tend vers 0

donc $\lim_{h \to 0} \frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$

donc uv est dérivable sur I et (uv)' = u'v + uv'

Ex : Soit la fonction w définie sur]0 ; +∞[par $w(x) = x^2 \times \sqrt{x}$
w est le produit de deux fonctions u et v définies et dérivables sur]0 ; +∞[par $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$ donc w est dérivable sur]0 ; +∞[.

$$w'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x \times \sqrt{x} + x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2 + x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}}$$

c) dérivée de la fonction ku :

propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel.
La fonction ku est dérivable sur I et (ku)' = ku'

► **démonstration**

Soit v la fonction constante telle que $v(x) = k$.
D'après la propriété précédente,
$(ku)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = u'(x) \times k + u(x) \times 0 = ku'(x)$

donc ku est dérivable sur I et (ku)' = ku'

c) dérivée de la fonction $\frac{u}{v}$:

propriété *admise* : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que pour tout x appartenant à I, $v(x) \neq 0$.

La fonction quotient $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

Ex : Soit la fonction w définie sur]4 ; +∞[par $w(x) = \frac{2x - 1}{x - 4}$

w est le quotient de deux fonctions u et v définies et dérivables sur]4 ; +∞[par
$u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = x - 4$
donc w est dérivable sur I et

$$w'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)} = \frac{2 \times (x - 4) - (2x - 1) \times 1}{(x - 4)^2} = \frac{2x - 8 - 2x + 1}{(x - 4)^2} = \frac{-7}{(x - 4)^2}$$

conséquence : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout x appartenant à I, $u(x) \neq 0$.

La fonction quotient $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

Je vais utiliser quelques unes de ces règles d'opérations pour trouver la fonction dérivée de la fonction polynôme P définie sur ℝ par $P(x) = 5x^4 - 7x^3 + 6$

$$P'(x) = 5 \times \left(x^4\right)' - 7 \times \left(x^3\right)' + 0 = 5 \times 4 \times x^3 - 7 \times 3x^2 = 20\,x^3 - 21x^2$$

II) Applications de la dérivation :

propriété *admise* : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

► f est croissante sur I si et seulement si **la fonction dérivée $f\,'$ est positive sur I**
Pour tout nombre réel x appartenant à I, $f\,'(x) \geqslant 0$

► f est décroissante sur I si et seulement si **la fonction dérivée $f\,'$ est négative sur I**
Pour tout nombre réel x appartenant à I, $f\,'(x) \leqslant 0$

► f est constante sur I si et seulement si **la fonction dérivée $f\,'$ est nulle sur I**
Pour tout nombre réel x appartenant à I, $f\,'(x) = 0$

Ex : Soit la fonction u définie sur [0 ; 4] par $u(x) = (x - 2) \times \sqrt{x}$
La fonction u est dérivable sur]0 ; 4] car elle est le produit de deux fonctions dérivables sur]0 ; 4].

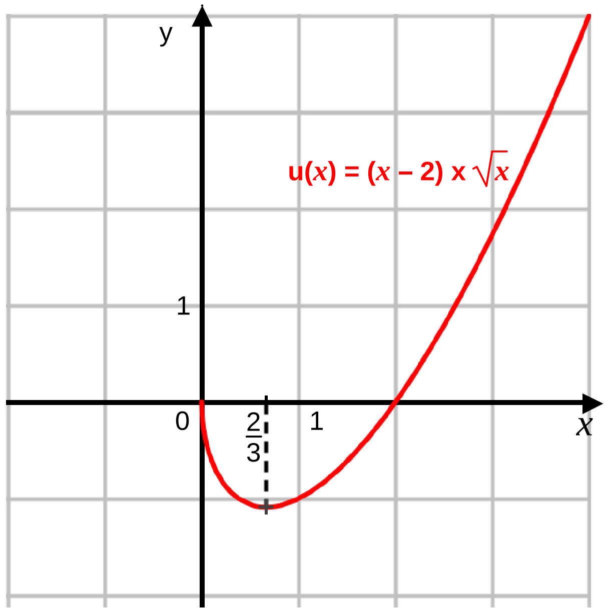
$$u'(x) = (x - 2)'\sqrt{x} + (x - 2)\left(\sqrt{x}\right)'$$
$$= 1 \times \sqrt{x} + (x - 2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{2\sqrt{x}\sqrt{x} + (x - 2)}{2\sqrt{x}} = \frac{3x - 2}{2\sqrt{x}}$$

la dérivée est positive quand $3x - 2 \geqslant 0$ c'est à dire $x \geqslant \frac{2}{3}$

On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{2}{3}$		4
$u'(x)$	‖	–	0	+	
$u(x)$	0	↘	$-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$	↗	4

voici la courbe représentative de la fonction u dans un repère orthonormé !



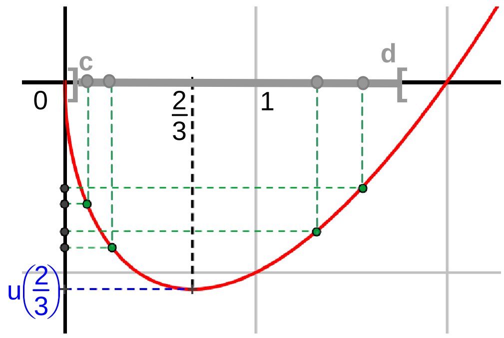
définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un nombre réel appartenant à I.

- f admet un maximum local f(a) en a s'il existe un intervalle ouvert]c;d[inclus dans I et contenant a tel que pour tout x appartenant à]c;d[, $f(x) \leqslant f(a)$

- f admet un minimum local f(a) en a s'il existe un intervalle ouvert]c;d[inclus dans I et contenant a tel que pour tout x appartenant à]c;d[, $f(x) \geqslant f(a)$

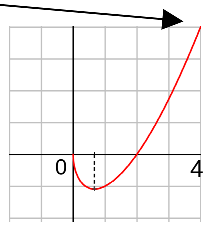
Ex : Reprenons la fonction u de l'exemple précédent.
Soit la fonction u définie sur [0 ; 4] par $u(x) = (x - 2) \times \sqrt{x}$

u admet un minimum local en $\frac{2}{3}$ puisqu'il existe un intervalle ouvert]c;d[inclus dans l'intervalle [0 ; 4] tel que pour tout x appartenant à]c;d[, $u(x) \geqslant u\left(\frac{2}{3}\right)$



remarque : un extremum local est un minimum local ou un maximum local.

pourquoi parler d' un intervalle ***ouvert*** dans la définition précédente ?
car, si la fonction a un extremum local en a, a ne peut pas être l'extrémité de l'intervalle I
Dans notre exemple, la fonction u est définie sur [0;4].
Elle n'admet pas de maximum local en 4 !!
(on ne peut pas créer un intervalle ouvert inclus dans I et contenant 4)



propriété *admise* : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a est un nombre réel de I qui n'est pas une extrémité de I.
S'il existe un extremum local en a, alors f '(a) = 0.

Ex : Reprenons la fonction u de l'exemple précédent.
Soit la fonction u définie sur [0 ; 4] par u(x) = (x – 2) x $\sqrt{x}$

u'(x) = $\frac{3x-2}{2\sqrt{x}}$

Il existe un minimum local pour $x = \frac{2}{3}$. On a bien u' $\left(\frac{2}{3}\right)$ = 0