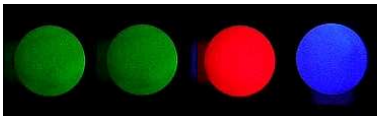
Probabilités

I) Notion de variable aléatoire

Définissons d'abord une expérience aléatoire :
On tire **au hasard** une boule de couleur dans un sac et on note la couleur de la boule obtenue.

aléatoire : on ne peut pas prévoir ni calculer de façon certaine laquelle de ces issues sera réalisée.



Les issues possibles de l'expérience sont Bleu (B), Rouge (R), Vert (V).
L'**univers** E est l'ensemble de toutes les issues possibles.
E = { B ; R ; V }

On peut associer à cette expérience la loi de probabilité suivante :

issues	B	R	V
probabilités	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

À partir de cette expérience, on crée un jeu :
- si le joueur obtient une boule bleue, il gagne 5 €
- si le joueur obtient une boule rouge, il perd 3 €
- si le joueur obtient une boule verte, il gagne 2 €

dans le cas de l' issue R, le gain est –3 !

On a associé à chaque issue de l'univers E un nombre (le gain algébrique du joueur)

$B \longrightarrow 5 \qquad R \longrightarrow -3 \qquad V \longrightarrow 2$

On a donc défini une fonction sur l'univers E à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Cette fonction est une variable aléatoire sur E. On peut la noter X par exemple.

définition : E est l'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire (univers).
Une variable aléatoire X définie sur E est une fonction qui, à chaque issue de E associe un nombre x.

une variable aléatoire est souvent notée X,Y,Z...
«X prend la valeur x » s'écrit $(X = x)$

II) Loi de probabilité d'une variable aléatoire

définition : X est une variable aléatoire sur l' univers E d'une expérience aléatoire.
Notons x_1 ; x_2;......; x_n l'ensemble des valeurs prises par X (x_i avec $1 \leqslant i \leqslant n$)
Définir la loi de probabilité de X, c'est associer à chaque valeur x_i la probabilité de l' événement (X = x_i) notée P(X = x_i)

On peut représenter la loi de probabilité de la variable aléatoire X par un tableau

x_i	x_1	x_2	...	x_n
P(X=x_i)	P(X=x_1)	P(X=x_2)	...	P(X=x_n)

P(X=x_1) + P(X=x_1) + ... + P(X=x_n) = 1
ou
$$\sum_{i=1}^{i=n} P(X = x_i) = 1$$

Ex : Reprenons l'exemple de la variable aléatoire définie au paragraphe précédent.
La probabilité de l'événement (X = 5) est la probabilité de l'issue B soit $\frac{1}{4}$

La probabilité de l'événement (X = –3) est la probabilité de l'issue R soit $\frac{1}{4}$

La probabilité de l'événement (X = 2) est la probabilité de l'issue V soit $\frac{1}{2}$

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	5	–3	2
P(X=x_i)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

III) Paramètres d'une variable aléatoire

a) espérance, variance et écart-type :

définitions :
Soit une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est résumée dans le tableau suivant. Pour des commodités d'écriture, on notera P(X=x_i) par p_i

x_i	x_1	x_2	...	x_n
P(X=x_i)	p_1	p_2	...	p_n

► L'espérance mathématique de la variable aléatoire X, notée E(X), est la moyenne pondérée des x_i

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots\ldots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i$$

> le tableau d'une loi de probabilité est un tableau des fréquences d'un caractère (comme nous en avons vus en statistique). La moyenne pondérée s'obtient en multipliant chaque valeur par sa fréquence puis en ajoutant tous les résultats.

► La variance de la variable aléatoire X, notée V(X), est la moyenne pondérée des carrés des écarts à l'espérance $(x_i - E(X))^2$

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \ldots\ldots + p_n(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{i=n} p_i(x_i - E(X))^2$$

> V est aussi la moyenne pondérée des carrés des valeurs x_i moins le carré de l'espérance E(X) ! 
> Avec cette expression, il y a moins d'opérations à faire !

$$V(X) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots\ldots + p_nx_n^2 - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{i=n} p_ix_i^2 - [E(X)]^2$$

► L' écart-type de la variable aléatoire X, noté σ(X), est défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

<u>Ex :</u> Reprenons l'exemple de la variable aléatoire définie précédemment.

x_i	5	–3	2
P(X=x_i)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

$E(X) = \frac{1}{4} \times 5 + \frac{1}{4} \times (-3) + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} + \frac{2}{2} = 1{,}25$ €

$V(X) = \frac{1}{4} \times 5^2 + \frac{1}{4} \times (-3)^2 + \frac{1}{2} \times 2^2 - 1{,}25^2 = \frac{25}{4} + \frac{9}{4} + \frac{4}{2} - 1{,}25^2 = 8{,}9375$

$\sigma(X) = \sqrt{8{,}9375} \simeq 3$ €

<u>Interprétation des résultats</u>

En répétant un grand nombre de fois l'expérience, les fréquences obtenues se rapprochent de la probabilité théorique (loi des grands nombres). La moyenne des résultats obtenus se rapproche alors de l'espérance de la loi de probabilité de X. L'espérance est donc la moyenne espérée en renouvelant l'expérience un grand nombre de fois. L' écart-type (paramètre de dispersion en statistique) garde cette signification pour la loi de probabilité. Il permet d'évaluer les "risques" ou les "espoirs" pour la loi de la probabilité.

Dans notre exemple, l'espérance est de 1,25 €. On peut donc espérer gagner en moyenne 1,25 € par partie si on joue un très grand nombre de fois.

Cependant, l'écart - type est de 3 €. Il est important par rapport à l'espérance et exprime que le risque d'avoir une perte (gain négatif) est important et à prendre en considération.

<u>remarque :</u> un jeu est équitable quand E(X) = 0

b) propriétés de la variance et de l'espérance :

propriété :
Soit une variable aléatoire X sur un univers E prenant les valeurs x_1 ; x_2;......; x_n
Soient a et b deux nombres réels,

$$E(aX+b) = aE(X) + b \qquad V(aX) = a^2V(X)$$

► **démonstration**
Soit une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est résumée dans le tableau suivant.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
P(X=x_i)	p_1	p_2	...	p_n

Les lois de probabilité aX et aX+ b sont résumées sur ce tableau

X	x_1	x_2	...	x_n
aX	ax_1	ax_2	...	ax_n
aX + b	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$	...	$ax_n + b$
Probabilité	p_1	p_2	...	p_n

► E(aX + b)
$= p_1(ax_1 + b) + p_2(ax_2 + b) + ... + p_n(ax_n + b)$
$= ap_1x_1 + p_1b + ap_2x_2 + p_2b + ... + ap_nx_n + p_nb$
$= a(p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n) + (p_1 + p_2 + ... + p_n)b$
$= aE(X) + b$

$\boxed{p_1 + p_2 + ... + p_n = 1 \text{ !}}$

► V(aX)
$= p_1a^2x_1^2 + p_2a^2x_2^2 +.... + p_na^2x_n^2 – [aE(X)]^2$
$= a^2 \left(p_1x_1^2 + p_2x_2^2 +.... + p_nx_n^2 – [E(X)]^2\right)$
$= a^2\, V(X)$