Produit Scalaire

I) Définitions du produit scalaire :

a) norme d'un vecteur :

définition : Soient $\vec{u}$ un vecteur du plan, A et B deux points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La norme du vecteur $\vec{u}$ est la longueur du segment [AB].
On la note $\|\vec{u}\|$. Si $\|\vec{u}\| = 1$, on dit que le vecteur est unitaire

propriétés admises :

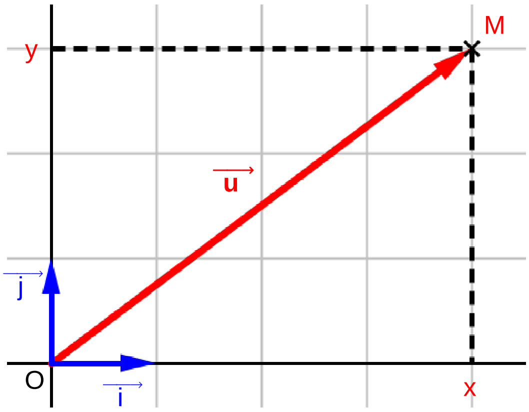
- $\|\vec{u}\| = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$

Ex : Soient A et B deux points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Dire que $\|\overrightarrow{AB}\| = 0$ revient à dire que A et B sont confondus.

- Si $\vec{u}$ a pour coordonnées (x;y) dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ex : M a pour coordonnées (x;y) et $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$
O a pour coordonnées (0;0)
donc $\|\vec{u}\| = OM = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

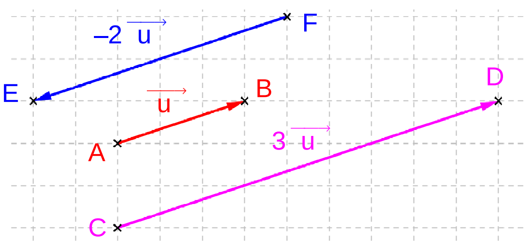
Dans l'exemple ci-contre $\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$



- Pour tout nombre réel k, on a $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$

en particulier,
$\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$

Ex : Dans l'exemple ci-contre,



$\overrightarrow{FE} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\|\overrightarrow{FE}\| = 2\|\overrightarrow{AB}\|$

$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{3}\|\overrightarrow{CD}\|$

$\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{EF}$ et $\|\overrightarrow{CD}\| = \frac{3}{2}\|\overrightarrow{EF}\|$

b) produit scalaire de deux vecteurs :

définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ est le **nombre réel** défini par :

- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$ si un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}\,,\vec{v})$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

Soit α la mesure de l'angle géométrique associé à $(\vec{u}\,,\vec{v})$

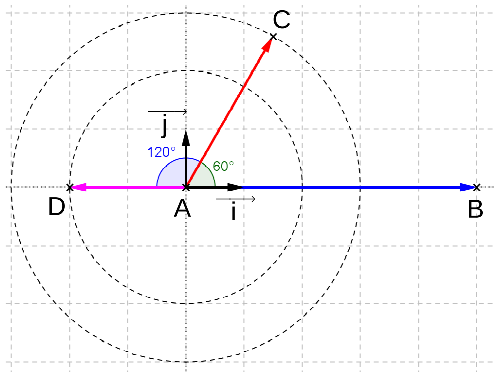
$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\alpha$

l'angle géométrique a le même cosinus que l'angle orienté $(\vec{u}\,,\vec{v})$ auquel il est associé !!

Dans le cas de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non nuls, on a donc

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$

Ex : Dans un plan muni d'un repère $(A\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$



$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$
$= AB \times AC \cos\widehat{BAC}$
$= 5 \times 3 \times \cos 60°$
$= 15 \times \dfrac{1}{2} = 7{,}5$

$\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AD}$
$= AC \times AD \cos\widehat{CAD}$
$= 3 \times 2 \times \cos 120°$
$= 6 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -3$

Si l'angle est aigu, le produit scalaire est positif.
Si l'angle est obtus, le produit scalaire est négatif !

propriété : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, alors $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire, alors $\vec{u}\,.\,\vec{v} = -\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$

► ***démonstration***

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\|\vec{u}\| = 0$ ou $\|\vec{v}\| = 0$ et $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| = 0$

or, par définition, si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$

donc $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| = -\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| = 0$

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

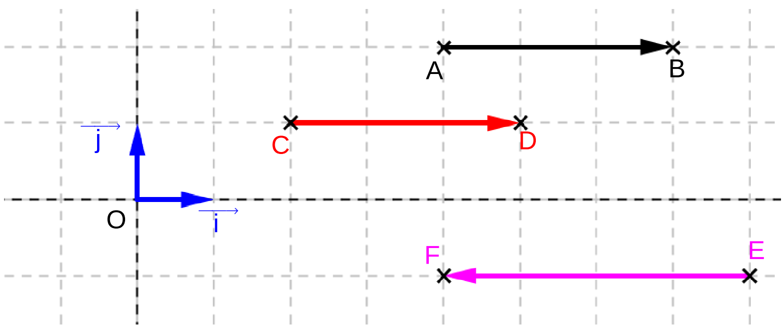
  ►si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, $(\vec{u}\,,\vec{v}) = 0$

donc $\cos(\vec{u}\,,\vec{v}) = 1$ et $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}\,,\vec{v}) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$

  ►si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire, $(\vec{u}\,,\vec{v}) = \pi$

donc $\cos(\vec{u}\,,\vec{v}) = -1$ et $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}\,,\vec{v}) = -\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$

Ex : Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$



$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD} = AB \times CD = 3 \times 3 = 9$

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{EF} = -AB \times EF = -3 \times 4 = -12$

<u>définition</u> : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ est le **<u>nombre réel</u>** défini par :

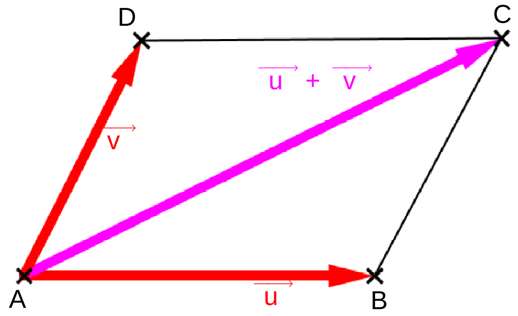
$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Par convention,

- $\vec{u}\,.\,\vec{u} = \vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2$

<u>une expression difficile à retenir ?</u>
Mais.. vous pouvez la retrouver facilement ! Pensez à l' identité remarquable que vous connaissez bien..
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ donc $2ab = (a + b)^2 - a^2 - b^2$ donc $ab = \frac{1}{2}\left[(a+b)^2 - a^2 - b^2\right]$
Imaginez maintenant que a et b soient des vecteurs...

<u>Ex :</u> Soit un parallélogramme ABCD
$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$



<u>On a, d'après la définition précédente :</u>

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right)$$

<u>propriété</u> : **"expression du produit scalaire dans un repère orthonormé"**

Dans **un repère orthonormé** $(0\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$, soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
On a :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy'$$

c' est **l'expression analytique** du produit scalaire !

► ***démonstration***

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On a donc $(\vec{u} + \vec{v})\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$, $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ et $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$ (voir propriétés admises)

On a aussi $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 = x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2$

Exprimons le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$\vec{u}\,.\,\vec{v}$

$= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\cancel{x^2} + 2xx' + \cancel{x'^2} + \cancel{y^2} + 2yy' + \cancel{y'^2} - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} - \cancel{x'^2} - \cancel{y'^2}\right)$

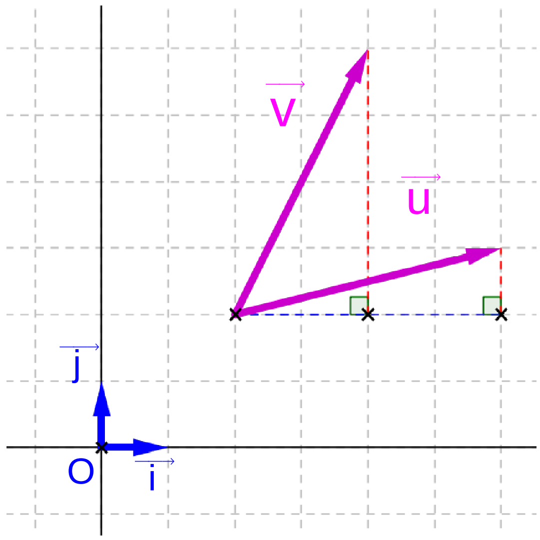
$= xx' + yy'$

Ex :

Soit un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan

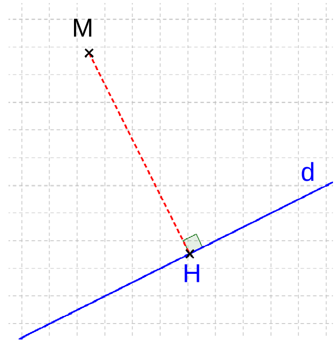
Soient les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} . \vec{v} = 4 \times 2 + 1 \times 4 = 12$$



c) autres expressions du produit scalaire de deux vecteurs :

► **avec un projeté orthogonal**



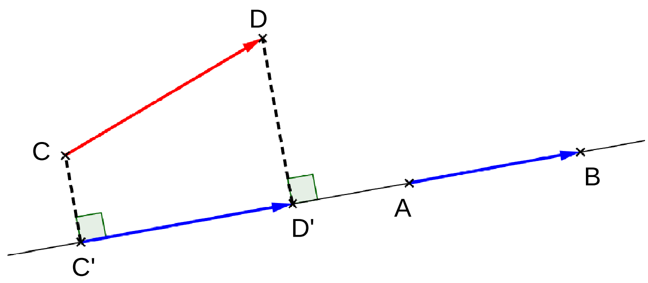
définition : Soient une droite d et un point M du plan. Le projeté orthogonal de M sur la droite d est le point d'intersection H de d et la perpendiculaire à d passant par M.

propriété :

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls.

C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB).

On a alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$



on a pris l'habitude de dire que $\overrightarrow{C'D'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{CD}$ sur $\overrightarrow{AB}$!

Ex :

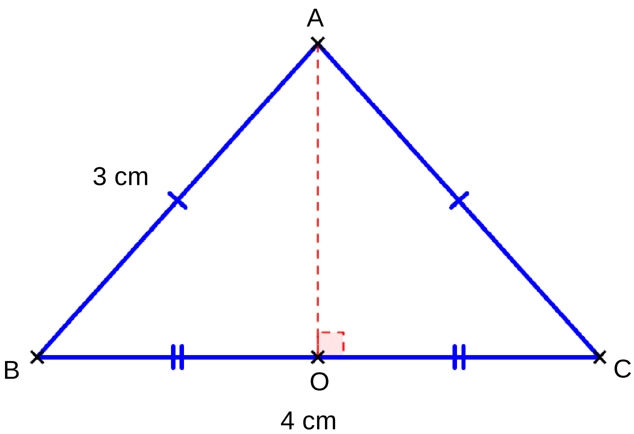
Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A tel que AB = 3cm et BC = 4cm

Soit O le milieu de [BC]. Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

Le projeté orthogonal de A sur [BC] est le point O car ABC est isocèle en A.

On a donc,

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BO \times BC = 2 \times 4 = 8$



II) Produit scalaire et opérations :

propriété : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et un nombre réel a.

► $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$ ► $(a\vec{u}).\vec{v} = a(\vec{u}.\vec{v})$

► ***démonstration***

Dans un repère orthonormé, soient les vecteurs du plan $\vec{u}(x;y)$, $\vec{v}(x';y')$, $\vec{w}(x'';y'')$ et un nombre réel a

► $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w}$

$= (x + x')x'' + (y + y')y'' = xx'' + x'x'' + yy'' + y'y'' = (xx'' + yy'') + (x'x'' + y'y'')$

$= \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$

► $(a\vec{u}).\vec{v}$

$= axx' + a\,yy' = a(xx' + yy')$

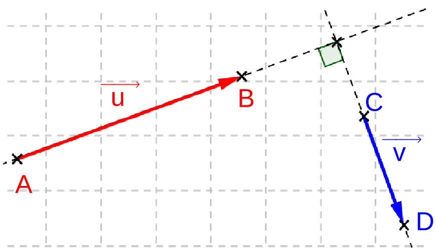
$= a(\vec{u}.\vec{v})$

conséquence (identités remarquables) :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

III) Vecteurs orthogonaux :



définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si (AB) et (CD) sont perpendiculaires

convention : le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

propriété : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

► ***démonstration***

► Dans un repère du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

Soient A et B tels $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Par définition, $(OA)\perp(OB)$ et $\widehat{AOB} = 90°$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\widehat{BAC} = OA \times OB \times \cos 90° = OA \times OB \times 0 = 0$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$

► Dans un repère du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on suppose que $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

Soient A et B tels $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. On a $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\widehat{BAC} = 0$

De plus, OA et OB sont différents de 0 ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls).

Par suite, $\cos\widehat{BAC} = 0$ donc $\widehat{BAC} = 90°$ et $(OA)\perp(OB)$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux (par convention)

conséquence : Dans un repère orthonormé, soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs non nuls.

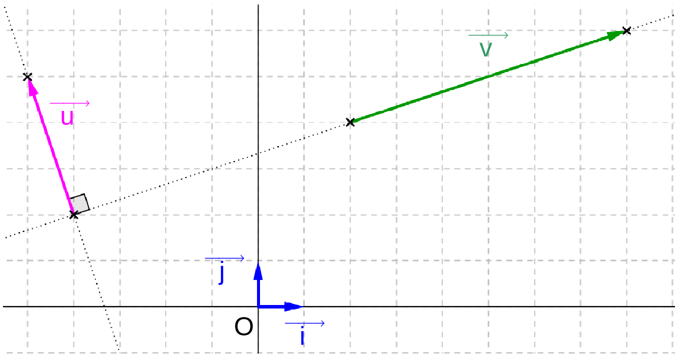
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$

Ex :
Soit un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$.

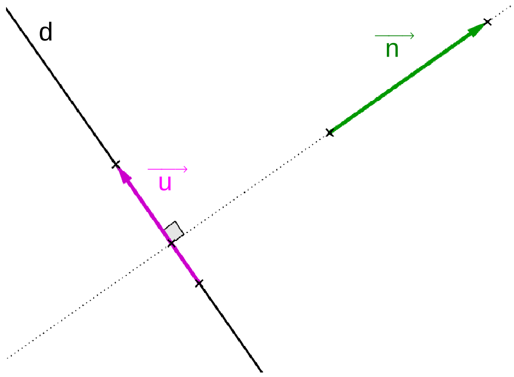
On a $\vec{u}.\vec{v} = -1 \times 6 + 3 \times 2 = -6 + 6 = 0$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.



IV) Vecteur normal à une droite :

définition : Soit d une droite du plan.
Un vecteur normal à d est un vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à tout vecteur directeur $\vec{u}$ de d.



propriété :
Dans un repère orthonormé,

- Si une droite d a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$) alors le vecteur $\vec{n}(a;b)$ est un vecteur normal à d
- Réciproquement, si un vecteur $\vec{n}$ non nul ayant pour coordonnées (a;b) est normal à une droite d alors d a une équation du type $ax + by + c = 0$

► ***démonstration***

► Dans un repère orthonormé, soit une droite d d'équation $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$). Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (a;b).
On sait que $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de d.
Or $\vec{u}.\vec{n} = a(-b) + ba = -ab + ba = 0$
Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à d

► Soit $\vec{n}(a;b)$ un vecteur non nul normal à une droite d.
Soit un point A $(x_A;y_A)$ de la droite d. Dire qu'un point M appartient à d revient à dire que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ (conséquence de la définition précédente)
donc $(x - x_A)a + (y - y_A)b = 0$ et par suite, $ax + by - ax_A - b\,y_A = 0$
On obtient bien une équation du type $ax + by + c = 0$ ($c = -ax_A - b\,y_A$)