SUITES

I) Notion - Définitions :

a) notion de suite numérique :

En France, le premier service météorologique est créé en 1855. A partir de cette date, les températures sont relevées chaque jour. La liste de tous les nombres obtenus grâce à ces mesures permet d'observer l'évolution du climat. Pour cela, cette liste doit être ordonnée afin de pouvoir se repérer et dater les constatations.

Supposons que les premiers termes de cette liste soient :
–4,5°; 6°; 15°; –9,4° etc.
Vous savez alors que le deuxième terme de la liste (dit aussi "terme de rang 2") (6°) correspond à la température relevée le deuxième jour, que –9,4° est la température du 4ème jour etc.

Imaginez que les relevés des températures se poursuivent indéfiniment au cours du temps, vous obtenez une liste ordonnée de nombres réels contenant un nombre infini de termes.

Cela vous donne une assez bonne idée de ce qu'est en mathématiques une suite numérique.

> Ecrire une telle liste, c'est associer à un nombre réel (la température) le nombre correspondant au rang qu'il occupe !!
> 15 correspond au rang 3; –9,4 au rang 4 etc.
> On a donc défini une fonction !!
> Par exemple, 6 est l'image de 2 par cette fonction.

b) définition et notation :

définition : Une suite numérique u est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ (ou sur une partie de $\mathbb{N}$ à partir d' un certain entier naturel (**))
Cette suite est notée (u_n)
On note u_n ou $u_{(n)}$ le terme de rang n de la suite.

Ex :
► Le tableau ci-dessous donne la température moyenne annuelle relevée à Paris (source : station météo de Paris-Montsouris)

année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	......
température moyenne (℃)	5,13	9,60	11,96	11,98	11,43	11,37	11,56	10,24	11,99	10,81	

On peut définir la suite u_n des températures en choisissant comme rang n le nombre d'années écoulées depuis l'an 2003.
On a alors $u_0 = 5,13$; $u_1 = 9,6$; ...... $u_6 = 11,56$
10,81 est le terme de rang 9 de la suite (u_n)

► (**) A partir des données du tableau précédent, on aurait très bien pu définir une suite (v_n) à partir du rang 2003.
On a alors $v_{2003} = 5,13$; $v_{2004} = 9,6$; ...... $v_{2009} = 11,56$

> La fonction v est ici définie sur une partie de $\mathbb{N}$ (tous les entiers naturels supérieurs ou égaux à 2003). La suite numérique (v_n) peut aussi s'écrire $(v_n)_{n \geqslant 2003}$

II) Modes de génération d'une suite numérique :

Pour définir, créer une suite on peut utiliser plusieurs procédés !

a) à l'aide d'une formule explicite :

définition : Quand une suite (u_n) est donnée par son terme général u_n défini **directement** en fonction de n, on dit que la suite est définie sous forme explicite.

Ex :

▶ Soit la suite (w_n) telle que $w_n = 3n + 2$

$w_0 = 3 \times 0 + 2 = 2$; $w_7 = 3 \times 7 + 2 = 23$

on a $w_n = f(n)$ avec $f(x) = 3x + 2$!

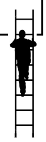
▶ Soit la suite (v_n) telle que $v_n = \sqrt{n-4}$

$v_4 = \sqrt{4-4} = 0$; $v_9 = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

attention, la suite v_n n'est définie qu'à partir du rang n=4 !! Le nombre sous le radical ne peut pas être négatif !

b) par récurrence :

Je suis sur le premier barreau d'une échelle. Je hisse mon pied droit sur le deuxième échelon, j'exerce une poussée et me voilà sur le barreau suivant. Je vais maintenant répété le processus précédent pour atteindre le troisième échelon. Et ainsi de suite pour continuer à grimper. Je procède par **récurrence** (du latin recurrere "revenir en arrière"). Je regarde "en arrière" pour reproduire le procédé.



définition : Quand une suite (u_n) est donnée par son premier terme et une relation exprimant chaque terme en fonction du précédent, on dit que la suite (u_n) est définie par une relation de récurrence.

la suite (u_n) est qualifiée de suite récurrente

Ex :

▶ Soit la suite (v_n) telle que $\mathbf{v_0 = 5}$ et $\mathbf{v_{n+1} = 4v_n - 3}$

$v_1 = 4v_0 - 3 = 4 \times 5 - 3 = 17$

$v_2 = 4v_1 - 3 = 4 \times 17 - 3 = 65$

etc.

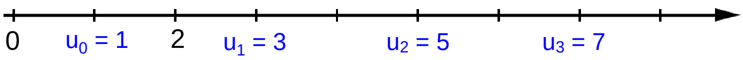
(v_n) est définie par son premier $v_0 = 5$ et la relation de récurrence $v_{n+1} = f(v_n)$ avec $f(x) = 4x - 3$

III) Représentation graphique d'une suite :

a) sur un axe :

Soit (u_n) la suite formée par les entiers impairs rangés dans l'ordre croissant.

On place les termes u_0, u_1, u_2 etc.. sur l'axe



b) dans un plan :

Soit la suite (u_n) telle que $u_n = \frac{n^2}{4} + \frac{1}{2}$

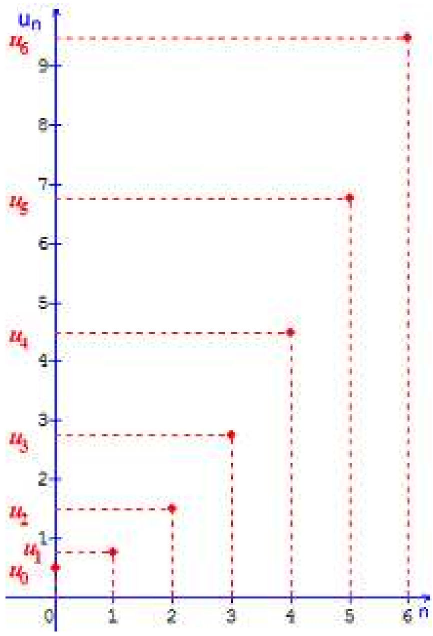
On place dans un repère les points de coordonnées $(n;u_n)$

$u_0 = \frac{0^2}{4} + \frac{1}{2} = 0,5$ $\qquad$ $u_1 = \frac{1^2}{4} + \frac{1}{2} = 0,75$

$u_2 = \frac{2^2}{4} + \frac{1}{2} = 1,5$ $\qquad$ $u_3 = \frac{3^2}{4} + \frac{1}{2} = 2,75$

$u_4 = \frac{4^2}{4} + \frac{1}{2} = 4,5$ $\qquad$ $u_5 = \frac{5^2}{4} + \frac{1}{2} = 6,75$

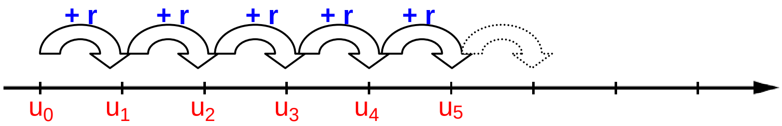
$u_6 = \frac{6^2}{4} + \frac{1}{2} = 9,5$



IV) Suites arithmétiques:

définition : une suite (u_n) est une suite arithmétique si et seulement si il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$
Le réel r est appelé raison de la suite (u_n)

chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent le même réel r !



Ex :

► la suite des entiers naturels est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1

► la suite des nombres pairs 0, 2, 4, 6..... est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2

► Soit la suite (u_n) telle que $u_n = 4n + 3$. (u_n) est une suite arithmétique de raison 4
$u_{n+1} – u_n = 4(n + 1) + 3 – 4n – 3 = 4n + 4 + 3 – 4n – 3 = 4$

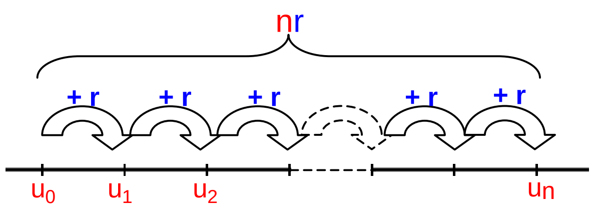
propriété 1: Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r
Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$

Ex : Soit (w_n) une suite arithmétique de premier terme $w_0 = 7$ et de raison 3
$w_{54} = 7 + 54 \times 3 = 169$

► approche de la démonstration

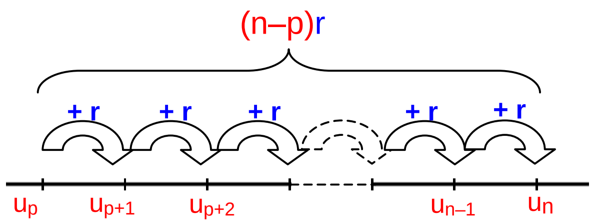
(la démonstration complète ne peut être effectuée à ce stade)
Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r
Par définition,
$u_1 = u_0 + r$
$u_2 = u_1 + r = u_0 + r + r = u_0 + 2r$
$u_3 = u_2 + r = u_0 + 2r + r = u_0 + 3r$

$u_n = u_{n–1} + r = u_0 + (n – 1)r + r = u_0 + nr$



propriété 1 (bis): Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r
Pour tous nombres entiers naturels n et p, on a $u_n = u_p + (n – p)r$

► démonstration



Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r
Soit n et p deux nombres entiers naturels
D'après la propriété précédente,
$u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$
donc, $u_n – u_p = (u_0 + nr) – (u_0 + pr) = (n – p)r$
donc, $u_n = u_p + (n – p)r$

propriété 2 :

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

somme des entiers de 1 à n

► **démonstration**

On peut écrire la somme S des n premiers termes de deux manières :

$$S = 1 + 2 + ... + (n-1) + n$$
$$S = n + (n-1) + ... + 2 + 1$$

Additionnons les deux lignes,

$$\begin{array}{rl} & S = 1 + 2 + ... + (n-1) + n \\ + & S = n + (n-1) + ... + 2 + 1 \\ \hline & 2S = 1+n + n+1 + ... + n+1 + n+1 \end{array}$$

on obtient une somme de n termes égaux à (n + 1)

Donc $\qquad 2S = n(n+1)$

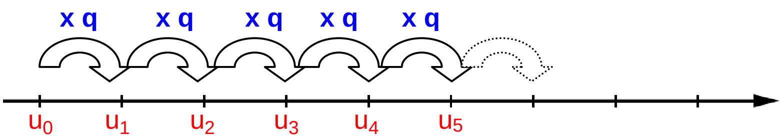
Par suite, $\qquad S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

V) Suites géométriques :

définition : une suite (u_n) est une suite géométrique si et seulement si il existe un réel q non nul tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n \times q$

Le réel q est appelé raison de la suite (u_n)

chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par le même réel non nul q



Ex :

$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4 \quad 2^5$

► La suite des puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32.... est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2

► Soit la suite (u_n) telle que $u_n = 3 \times 5^n$. (u_n) est une suite géométrique de raison 5 car $u_{n+1} = 3 \times 5^{n+1} = (3 \times 5^n) \times 5 = u_n \times 5$

propriété 3: Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q

Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$

► **approche de la démonstration**

(la démonstration complète ne peut être effectuée à ce stade)

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q

Par définition,

$u_1 = u_0 \times q$

$u_2 = u_1 \times q = u_0 \times q \times q = u_0 \times q^2$

$u_3 = u_2 \times q = u_0 \times q^2 \times q = u_0 \times q^3$

$\vdots$

$u_n = u_{n-1} \times q = u_0 \times q^{(n-1)} \times q = u_0 \times q^n$

propriété 3 (bis): Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q
Pour tous nombres entiers naturels n et p, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$

► **démonstration**

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q
Soient n et p deux nombres entiers naturels
D'après la propriété précédente,
$u_n = u_0 \times q^n$ et $u_p = u_0 \times q^p$

donc, $\dfrac{u_n}{u_p} = \dfrac{u_0 \times q^n}{u_0 \times q^p} = q^{n-p}$

donc, $u_n = u_p \times q^{n-p}$

propriété 4 :
Pour tout réel q ($q \neq 1$),

on a $1 + q + q^2 \text{......} + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ← somme des (n + 1) premières puissances successives de q

Ex : $1 + 3 + 3^2 + \text{.....} + 3^{11} = \dfrac{1 - 3^{12}}{1 - 3} = 265\ 720$

► **démonstration**
Soit un réel q tel que $q \neq 1$

Soit $S = 1 + q + q^2 \text{.............} + q^n$
on a $qS = q + q^2 \text{............} + q^n + q^{n+1}$

Faisons la différence des deux lignes,

$$\begin{array}{rl} & S = 1 + q + q^2 \text{......} + q^n \\ - & qS = \quad\ q + q^2 \text{......} + q^n + q^{n+1} \\ \hline & (1 - q)\, S = 1 - q^{n+1} \end{array}$$

or, $(1 - q) \neq 0$

donc $S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$