Polynômes de degré 2

I) Fonctions polynômes de degré 2 :

a) rappels :

définition : Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des nombres réels donnés avec $a \neq 0$
a, b, c sont les coefficients de f

f est appelée également **une fonction trinôme du second degré** ou parfois même tout simplement **trinôme du second degré**

Ex :

- La fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 3x - 6$ est une fonction polynôme de degré 2. Ses coefficients sont $a = -5$; $b = 3$ et $c = -6$
- La fonction f définie par $f(x) = (x - 5)(x + 2)$ est une fonction trinôme du second degré. En effet, $(x - 5)(x + 2) = x^2 + 2x - 5x - 10 = x^2 - 3x - 10$. Ses coefficients sont $a = 1$; $b = -3$ et $c = -10$.
- La fonction f définie par $f(x) = x^2 - \sqrt{5}$ est une fonction trinôme du second degré. Ses coefficients sont $a = 1$; $b = 0$ et $c = -\sqrt{5}$.

attention, $(x-2)^2 - x^2$ n'est pas un trinôme du **second degré**. $(x-2)^2 - x^2 = x^2 - 4x + 4 - x^2 = -4x + 4$. Il s'agit d'un polynôme du **premier degré** ! . (a n'est pas différent de 0).

b) forme canonique :

propriété : Tout trinôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
Cette forme est appelée forme canonique de f ou forme canonique du trinôme.

α et β sont deux lettres grecques se lisant respectivement "alpha" et "bêta". Les mathématiciens utilisent souvent ces lettres !

Ex : $f(x) = 3x^2 - 12x + 13 = 3(x-2)^2 + 1$

forme canonique avec $\alpha = 2$ et $\beta = 1$

► **démonstration**

$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$

j'ai mis a en facteur (possible car $a \neq 0$)

or, $\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$ est le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

pensons aux identités remarquables !
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2\,x\,\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

donc $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{ab^2}{4a^2} + c$

$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$

$= a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

c) variations - courbe représentative :

▶ variations :

propriété : Soit une fonction polynôme de degré 2 définie $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)
Le sens de variation de f est donné par les tableaux de variations :

- si $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗

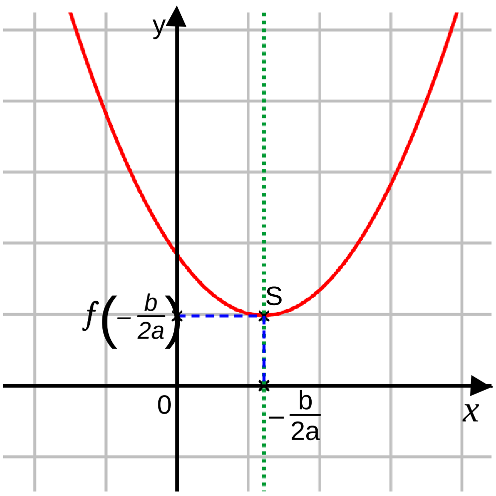
- si $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘

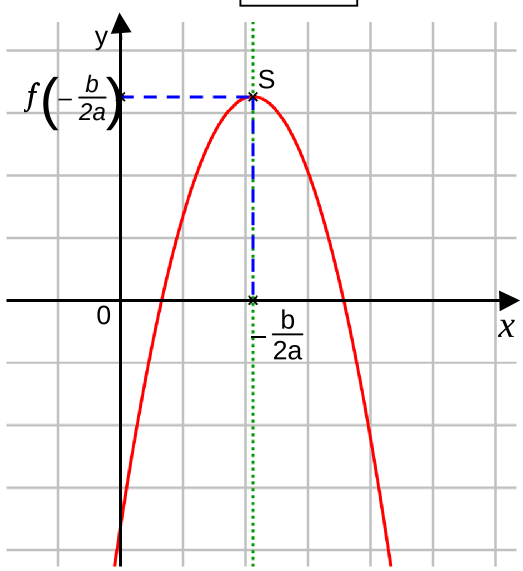
▶ courbe représentative :

Dans un repère du plan, la courbe représentative d'une fonction polynôme f de degré 2 telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole. Le point S est appelé le sommet de la parabole. La parabole est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = -\frac{b}{2a}$

a > 0



a < 0



quand a est positif, la parabole a la forme d'un U.
Son sommet est le minimum de la fonction

quand a est négatif, la parabole a la forme d'un U inversé.
Son sommet est le maximum de la fonction

II) Equations du second degré :

► équation du second degré

définition : une équation du second degré d'inconnue x est une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b, c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$.
Une solution de l'équation est appelée racine du trinôme $ax^2 + bx + c$

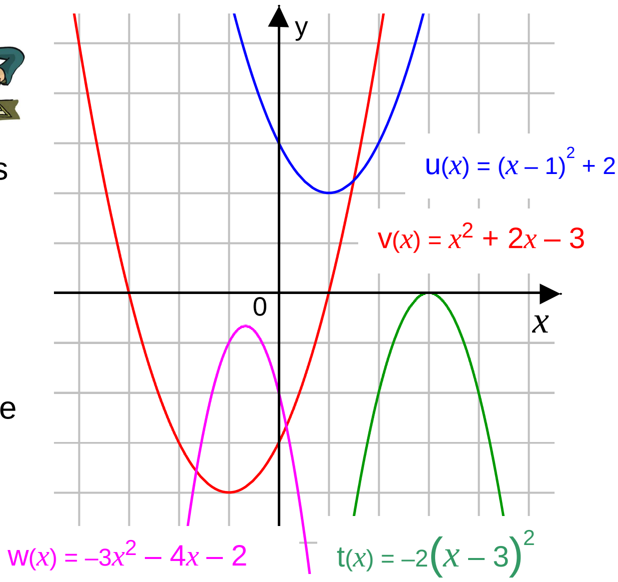
l' aspect de la parabole de la fonction trinôme permet de conjecturer le nombre de solutions !

$u(x) = 0$ n'a pas de solution. La courbe et l'axe des x n'ont aucun point commun.

La fonction trinôme v a deux racines (–3 et 1). La courbe coupe l'axe des x en deux points distincts.

L' équation $w(x) = 0$ n'a aucune solution. La courbe et l'axe des x n'ont aucun point commun.

$t(x) = 0$ a une racine unique (3). La courbe et l'axe des x ont un point d'intersection unique.



► résoudre une équation du second degré

définition :
Soit f une fonction polynôme de degré 2 telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$
La forme canonique de f est $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$

Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$. On le note Δ.

cette lettre grecque se lit "delta" !

propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 telle que
$f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$
Le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe de Δ

- si $\Delta > 0$,

l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

- si $\Delta = 0$, le trinôme a une seule racine $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

on dit que x_0 est une racine double du trinôme!

- si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n' a pas de solution.

► démonstration

Soit f une fonction polynôme de degré 2 telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$

La forme canonique de f est $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2-4ac}{4a} = -\dfrac{\Delta}{4a}$

<u>On a donc</u> $f(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$

cette forme est également appelée "forme canonique" (la forme canonique peut donc s'exprimer de deux façons !)

si $\Delta < 0$, $-\dfrac{\Delta}{4a^2}$ est positif donc $f(x)$ est le produit de deux facteurs différents de 0.
L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

si $\Delta = 0$, $f(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ donc, sachant que $a \neq 0$, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à :

$x + \dfrac{b}{2a} = 0$.

L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

si $\Delta > 0$, $\dfrac{\Delta}{4a^2}$ est positif $\sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

et $f(x) = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

$= a\left(x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

donc, sachant que $a \neq 0$, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à :

$x + \dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ ou $x + \dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$

L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

► <u>factorisation du trinôme :</u>

De la démonstration précédente, on peut déduire une factorisation de $f(x)$ si $\Delta \geqslant 0$:

- si $\Delta > 0$, $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

- si $\Delta = 0$, $f(x) = a(x-x_0)^2$

voici la raison pour laquelle on parlait dans la propriété précédente de racine **double** du trinôme!

Ex :

▶ Résolvons l'équation : $2x^2 + 3x - 5 = 0$

Le trinôme est du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec a = 2 b = 3 c = – 5

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 9 + 40 = 49 = 7^2$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+7}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-7}{4} = \dfrac{-10}{4} = -\dfrac{5}{2}$

> une forme factorisée du trinôme $2x^2 + 3x - 5$ est donnée par $2(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right)$

▶ Résolvons l'équation : $3x^2 - 2x + \dfrac{1}{3} = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \dfrac{1}{3} = 4 - 4 = 0$

$\Delta = 0$ donc l'équation a une unique solution $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2 \times 3} = \dfrac{1}{3}$

> une forme factorisée du trinôme $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ est donnée par $3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$

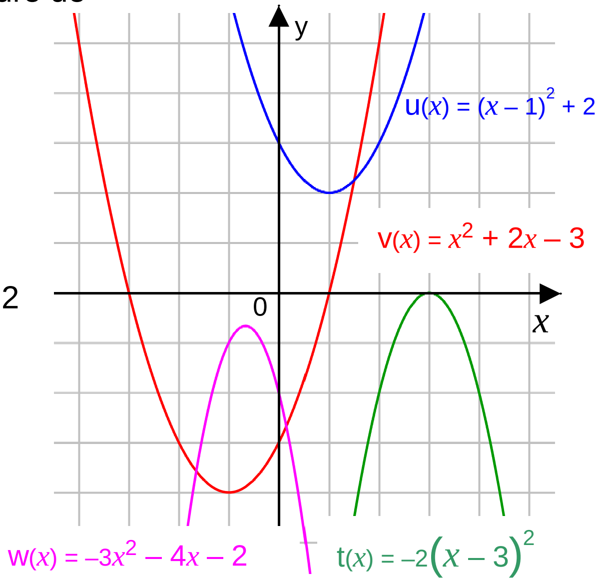
▶ Résolvons l'équation : $x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 - 12 = -8$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'a pas de solution.

III) Signe du trinôme :

On peut conjecturer le signe du trinôme d'après l'allure de sa courbe représentative.



Les courbes représentatives de u et w n'ont aucun point avec l'axe des x. Les trinômes $u(x)$ et $w(x)$ ne changent pas de signe.
Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $u(x) > 0$ et $w(x) < 0$

La courbe correspond à une fonction trinôme ayant 2 racines distinctes : –3 et 1.
Le trinôme $v(x)$ change de signe.
Si $x \in [-3 ; 1]$ alors $v(x) \leqslant 0$
Si $x \in]-\infty ; -3[\cup]1 ; +\infty[$ alors $v(x) > 0$

La fonction t a un seul point commun avec l'axe des x. Si x est différent de la racine unique x_0, le trinôme $t(x)$ a toujours le même signe ($t(x_0) = 0$).
Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $t(x) \leqslant 0$

<u>propriété :</u>
Soit f une fonction polynôme de degré 2 telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Si $\mathbf{\Delta < 0}$ alors $f(x)$ est du signe de a

Si $\mathbf{\Delta = 0}$ alors $f(x)$ est du signe de a si et seulement si $x \neq -\dfrac{b}{2a}$ (si $x = -\dfrac{b}{2a}$, $f(x) = 0$)

Si $\mathbf{\Delta > 0}$ alors f a deux racines distinctes x_1 et x_2 telles que $x_1 < x_2$.

- $f(x)$ est du signe contraire de a si et seulement si $x \in \,]x_1 \,;\, x_2[$
- $f(x)$ est du signe de a si et seulement si $x \in \,]-\infty \,;\, x_1[\,\cup\,]x_2 \,;\, +\infty[$

(si $x = x_1$ ou $x = x_2$ alors $f(x) = 0$)

► démonstration

Soit f une fonction polynôme de degré 2 telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Reprenons la forme canonique $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$

Si $\mathbf{\Delta < 0}$, $\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$ est strictement positif donc $a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$ est du signe de a.
Par suite, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f(x)$ est du signe de a.

Si $\mathbf{\Delta = 0}$, $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ Pour tout x différent de $-\dfrac{b}{2a}$, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ est strictement positif.
Par suite, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ et différent de $-\dfrac{b}{2a}$, $f(x)$ est du signe de a.

Si $\mathbf{\Delta > 0}$, f a deux racines distinctes x_1 et x_2. On peut écrire $f(x)$ sous la forme factorisée suivante : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

<u>Dressons un tableau de signes pour étudier le signe de $f(x)$:</u>

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		signe de a		signe de a		signe de a	
$(x - x_1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x - x_2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$a(x - x_1)(x - x_2)$		signe de a		signe de $(-a)$		signe de a	

Par suite, si $x \in \,]x_1 \,;\, x_2[$, $f(x)$ est du signe de a
si $x \in \,]-\infty \,;\, x_1[\,\cup\,]x_2 \,;\, +\infty[$, $f(x)$ est du signe contraire de a
si $x = x_1$ ou $x = x_2$; $f(x) = 0$

En conclusion, le trinôme $\mathbf{ax^2 + bx + c}$ est toujours du signe de a sauf pour les valeurs de x comprises entre les racines dans le cas où $\Delta > 0$!

Ex : Résolvons l'inéquation $-2x^2 - 5x - 2 \geqslant 0$

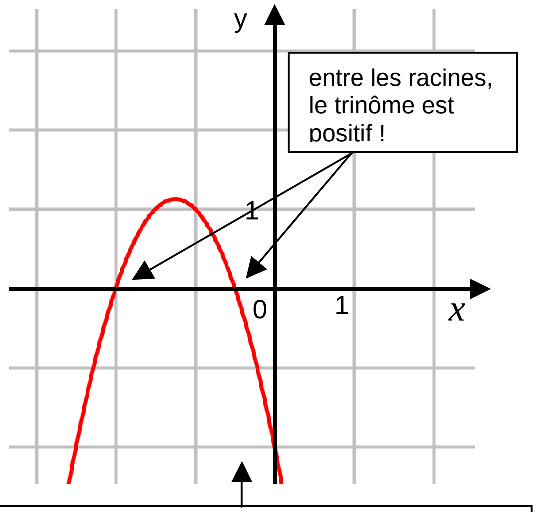
Calculons Δ : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 25 - 16 = 9$

$\Delta > 0$ donc l'équation $-2x^2 - 5x - 2 = 0$ a deux solutions distinctes

$x_1 = \dfrac{5 + \sqrt{9}}{2 \times (-2)} = \dfrac{5+3}{-4} = -2$ et $x_2 = \dfrac{5-3}{-4} = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2}$

Donc, le trinôme est positif (du signe de – a) pour tout x appartenant à $\left]-2 ; -\dfrac{1}{2}\right[$

Par suite, l'ensemble S des solutions de l'inéquation est $S = \left[-2 ; -\dfrac{1}{2}\right]$



courbe représentative de la fonction trinôme f telle que $f(x) = -2x^2 - 5x - 2$