Droites

I) Caractérisation d'une droite :

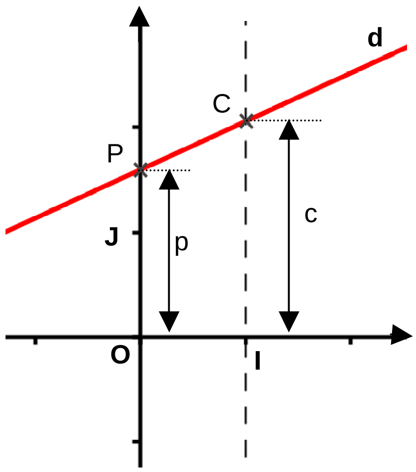
a) équation d'une droite :

rappel : **La représentation graphique** de **toute fonction affine** est une **droite**.

la réciproque est-t-elle vraie ? Toute droite correspond elle à la représentation graphique d'une fonction affine ?

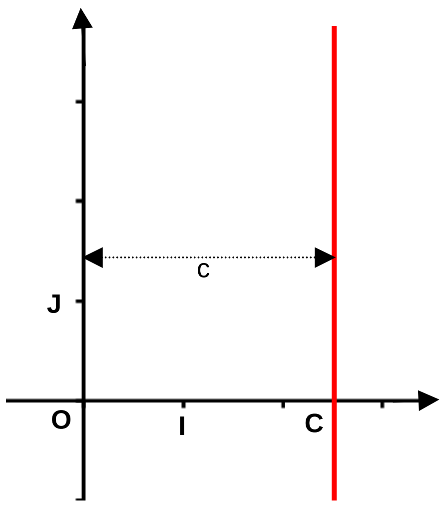
propriété : Dans un repère, **toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées** est la **représentation graphique d'une fonction affine**.
Tous les points **M (x;y)** d' une **droite d** vérifient **une équation de la forme**
y = mx + p où m et p désignent des réels.

► ***démonstration***
Le plan est muni du repère (O; I; J).
Soit d une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
d coupe (OJ) en P : (0 ; p). Elle coupe également la parallèle menée par I à l'axe des ordonnées en C : (1 ; c).
Posons alors m = c – p. Considérons **la fonction affine f définies par $f(x)$ = mx + p**
On a donc,
$f(0)$ = p et $f(1)$ = m x 1 + p = m + p = (c – p) + p = c.
donc C et P sont deux points de la représentation graphique f
Par suite, la droite d, passant par P:(0 ; p) et C: (1 ; c) est la représentation graphique de la fonction affine f et chaque point M: (x ; y) vérifie donc l'équation y = mx + p



propriété : Dans un repère, **une droite parallèle à l'axe des ordonnées** a une **équation** de la forme ***x* = c**

► ***démonstration***
Le plan est muni du repère (O; I; J).
Soit d une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
d coupe l'axe **(OI) en C : (c ; 0)**.
Chaque point de d a donc pour abscisse c puisque d est parallèle à l'axe des ordonnées.
L'équation de d est donc ***x* = c**



b) coefficient directeur d'une droite :

rappel : Soit la fonction affine définie par $f(x) = \mathrm{m}x + \mathrm{p}$.

La représentation graphique de la fonction affine f est la droite d'équation $y = \mathrm{m}x + \mathrm{p}$.

m est le **coefficient directeur de la droite**.

p est **l'ordonnée à l'origine de la droite**.

propriété : Soit une droite d non parallèle à l'axe des ordonnées et **m son coefficient directeur**.

Si $A:(x_A\ ;\ y_A)$ et $B:(x_B\ ;\ y_B)$ sont deux points distincts de d alors :

$$\mathrm{m} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

► ***démonstration***

Soient deux points distincts : **$A:(x_A\ ;\ y_A)$** et **$B:(x_B\ ;\ y_B)$**

D'après les propriétés précédentes, la droite (AB), qui a une équation du type $y = \mathrm{m}x + \mathrm{p}$ est la représentation graphique de la fonction affine $f(x) = \mathrm{m}x + \mathrm{p}$.

On a donc $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$.

Donc, **d'après la formule du coefficient directeur vu pour la fonction affine** on a :

$$\mathrm{m} = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

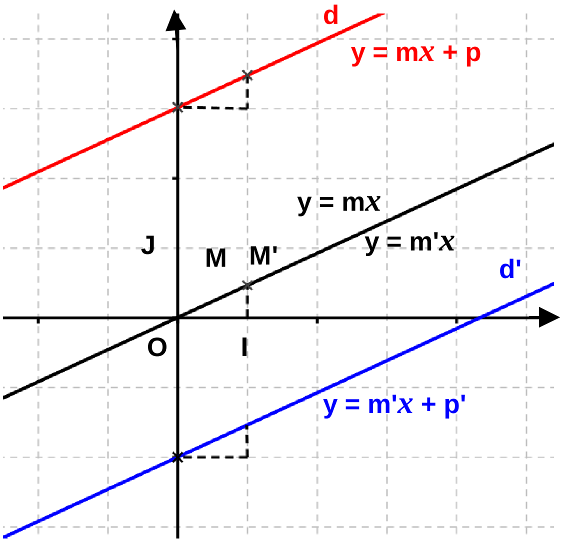
II) Position relatives de deux droites - Points alignés :

a) droites parallèles :

propriété : Dans un repère, **deux droites d et d' respectivement d'équations $y = \mathrm{m}x + \mathrm{p}$ et $y = \mathrm{m}'x + \mathrm{p}'$ sont parallèles** si et seulement si **$\mathrm{m} = \mathrm{m}'$**

► ***démonstration***

rappel : On a vu en troisième que la droite représentant la fonction affine $f(x) = \mathrm{m}x + \mathrm{p}$ est parallèle à la droite représentant la fonction linéaire $f(x) = \mathrm{m}x$



Le plan est muni du repère (O; I; J).

Dans notre cas, d et d' sont donc parallèles si et seulement si les droites d'équations $y = \mathrm{m}x$ et $y = \mathrm{m}'x$ sont parallèles.

Ces deux droites passent par **O:(0 ; 0)**.

D'autre part,

la première passe par le point **M:(1 ; m)** et la seconde par le point **M':(1 ; m')**

donc d et d' sont parallèles si et seulement si M et M' sont confondus donc d et d' sont parallèles si et seulement si $\mathrm{m} = \mathrm{m}'$

b) droites sécantes:

propriété : Dans un repère, **deux droites d et d' respectivement d'équations y = mx + p et y = m'x + p' sont sécantes** si et seulement si **m ≠ m'**

► ***démonstration***

D'après la propriété précédente,

d et d' **sont parallèles** si et seulement si **m = m'**

donc d et d' **ne sont pas parallèles (donc sécantes)** si et seulement si **m ≠ m'**

ce type de raisonnement repose sur la contraposition. exemple : la contraposée de l'expression (« s'il pleut, alors le sol est mouillé ») est (« si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas »). « s'il pleut, alors le sol est mouillé » donc « si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas »

c) points alignés :

propriété : Soient A, B, C trois points dont deux ont des abscisses différentes.
Les points **A, B, C sont alignés** si et seulement si les **droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur**.

► ***démonstration***

- Si **A, B, C** sont **alignés,** alors les droites **(AB) est (AC) sont confondues** donc parallèles et elles ont **le même coefficient directeur**.

- Réciproquement, si **(AB) et (AC) ont le même coefficient directeur**, alors elles sont parallèles. Or, **elles ont un point commun A** donc (AB) et (AC) sont confondues. Par suite, **A, B, C sont alignés**.