

Fonction carré - Fonctions polynômes du second degré

I) Fonction carré :

définition : La fonction carré est la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$



Tout nombre a un carré, f est donc bien définie sur \mathbb{R}

Ex : $f(-4) = (-4) \times (-4) = 16$ $f(5) = 25$

théorème : la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur \mathbb{R} est :

- ▶ strictement décroissante sur l'intervalle $] -\infty ; 0]$
- ▶ strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty [$

▶ démonstration

u et v sont deux nombres réels tels que $u < v$, c'est à dire $u - v < 0$, comparons $f(u)$ et $f(v)$

u et v positifs : $u \in [0 ; +\infty [$; $v \in [0 ; +\infty [$

$$f(u) - f(v)$$

$$= u^2 - v^2$$

$$= (u - v)(u + v)$$

or, $u < v$ donc $u - v < 0$
 donc $(u - v)(u + v) < 0$
 par suite, $f(u) - f(v) < 0$
 donc $f(u) < f(v)$

ainsi, pour tous réels positifs u et v ,
 si $u < v$ alors $u^2 < v^2$
 La fonction carré est donc **croissante**
 sur $[0 ; +\infty [$

u et v négatifs : $u \in]-\infty ; 0]$; $v \in]-\infty ; 0]$

$$f(u) - f(v)$$

$$= u^2 - v^2$$

$$= (u - v)(u + v)$$

or, $u < v$ donc $u - v < 0$
 donc $(u - v)(u + v) > 0$
 par suite, $f(u) - f(v) > 0$
 donc $f(u) > f(v)$

ainsi, pour tous réels négatifs u et v ,
 si $u < v$ alors $u^2 > v^2$
 La fonction carré est donc **décroissante**
 sur $] -\infty ; 0]$

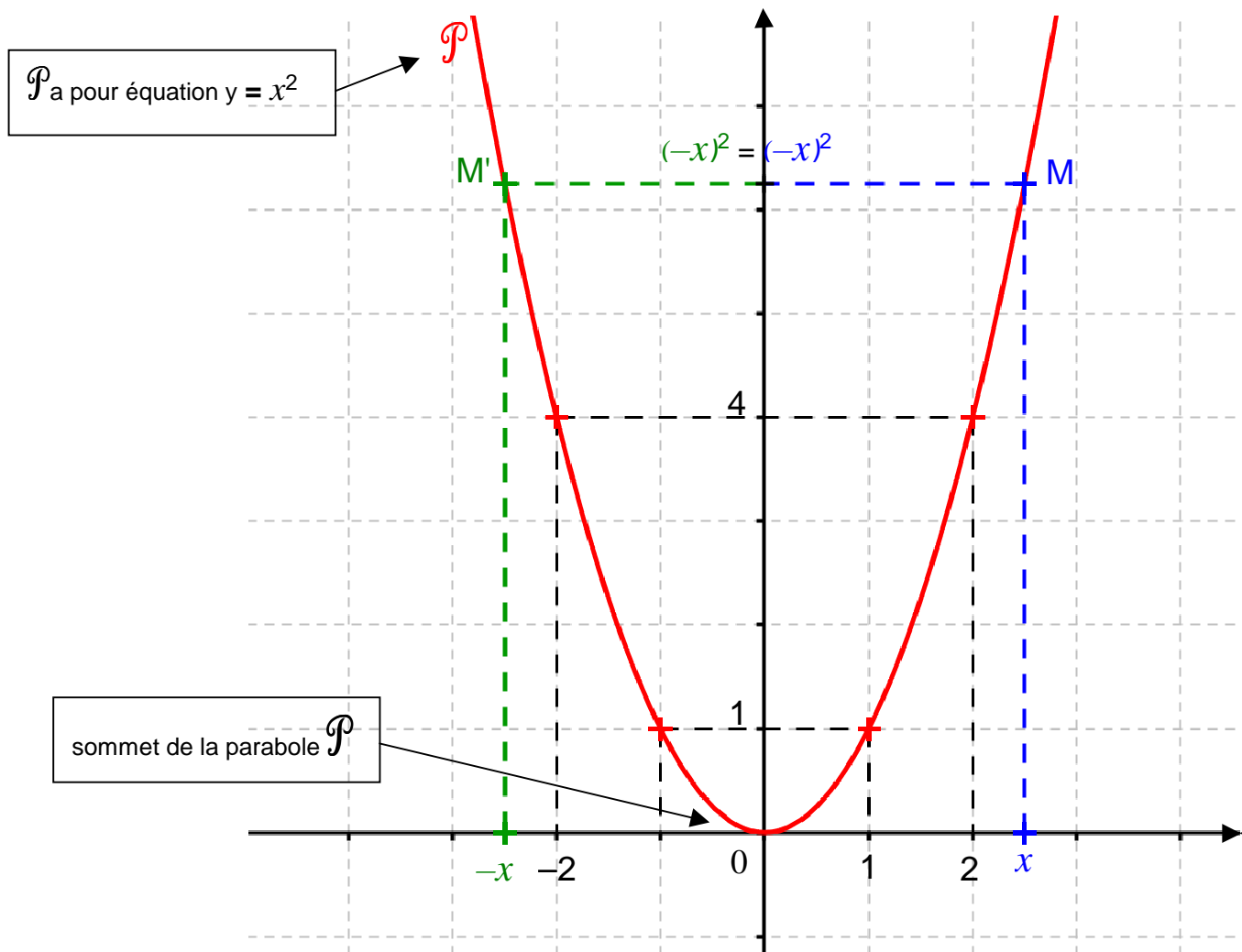
Tableau de variations de la fonction carré :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

$f(0) = 0$. 0 est le **minimum** de la fonction carré.

Représentation graphique de la fonction carré :

définition : Dans un repère orthogonal d'origine O, la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^2$ est **une parabole de sommet O**.



théorème : la parabole \mathcal{P} représentant la fonction carré admet **un axe de symétrie : l'axe des ordonnées**.

► **démonstration**

x est un nombre réel.

Le point $M(x; x^2)$ appartient à la parabole \mathcal{P} .

Le point symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées est $M'(-x; x^2)$

Or, M' appartient également à \mathcal{P} puisque $(-x)^2 = x^2$

donc \mathcal{P} admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

II) Fonctions polynômes de degré 2 :

définition : Une fonction **polynôme du second degré** (appelée aussi **trinôme**) est une fonction définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$.

Ex :

► $f(x) = -5x^2 + 3x - 1$ ($a = -5; b = 3; c = -1$)

► $g(x) = 8x^2 + 7$ ($a = 8; b = 0; c = 7$)

► $h(x) = 2(x - 1)(x + 4)$

en effet, $h(x) = (2x - 2)(x + 4) = 2x^2 + 8x - 2x - 8 = 2x^2 + 6x - 8$ ($a = 2; b = 6; c = -8$)

► $m(x) = (2x - 3)^2 + 7$

en effet, $4x^2 - 12x + 9 + 7 = 4x^2 - 12x + 16$ ($a = 4; b = -12; c = 16$)

Représentation graphique - Sens de variation :

propriétés (admisses) :

► La **représentation graphique** d'une fonction polynôme du second degré est une **parabole**. Appelons x_S l'abscisse du sommet S

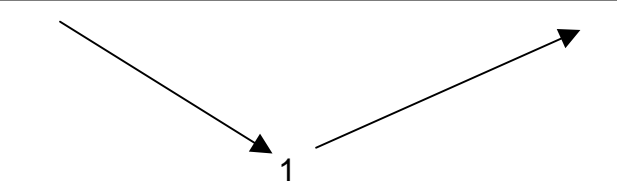
► La parabole admet **un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées**. Le sommet de la parabole se situe sur l'axe de symétrie.

► La fonction est donc :

ou décroissante sur $] -\infty ; x_S]$ puis **croissante** sur $[x_S ; +\infty [$

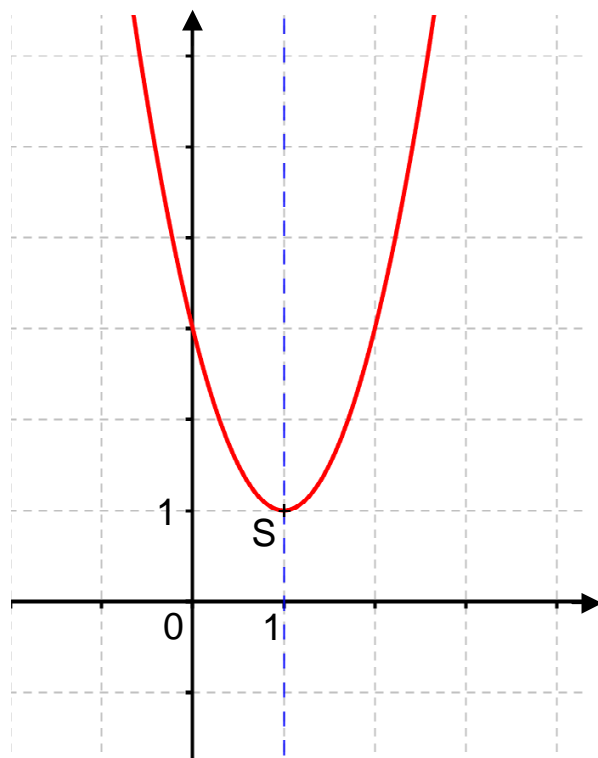
ou croissante sur $] -\infty ; x_S]$ puis **décroissante** sur $[x_S ; +\infty [$

Ex : $f : x \mapsto 2x^2 - 4x + 3$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			



La parabole a l'allure d'une "vallée". Son **sommet** correspond au **minimum** de la fonction.
C'est toujours le cas pour les fonctions du type $ax^2 + bx + c$ quand **a est un nombre positif**.



Ex: $f : x \mapsto -1,5x^2 + 2x + 5$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f(x)$			

La parabole a l'allure d'une "colline". Son **sommet** correspond au **maximum** de la fonction. C'est toujours le cas pour les fonctions du type $ax^2 + bx + c$ quand **a est un nombre négatif**.



propriété (admise) :

Soit une fonction polynôme de degré 2 définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$

Il existe deux nombres α et β tels que $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Cette écriture est la **forme canonique de $f(x)$**

Ex :

► Si $g(x) = 3x^2 - 30x + 60$, la **forme canonique** s'écrit $3(x - 5)^2 - 15$

vérifions le :

$$3(x - 5)^2 - 15 = 3(x^2 - 10x + 25) - 15 = 3x^2 - 30x + 75 - 15 = 3x^2 - 30x + 60$$

► Si $h(x) = x^2 - 6x$, la **forme canonique** s'écrit $(x - 3)^2 - 9$

vérifions le :

$$(x - 3)^2 - 9 = x^2 - 6x + 9 - 9 = x^2 - 6x$$