Fonction inverse - Fonctions homographiques

I) Fonction inverse :

rappel : Tout nombre réel x **différent de 0** a un inverse $\frac{1}{x}$

Ex : L'inverse de 5 est $\frac{1}{5}$. L'inverse de $\frac{3}{4}$ est $\frac{1}{\frac{3}{4}}$ soit $\frac{4}{3}$

définition : **La fonction inverse** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$

Ex : $f(-3) = -\frac{1}{3}$ $f\left(\frac{1}{5}\right) = 5$ $f\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{6}{7}$

$\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels sans 0. On le lit "$\mathbb{R}$ privé de zéro".
On peut aussi le noter à l'aide d'une réunion d'intervalles : $\mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$

théorème : la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est :

- ► strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$
- ► strictement décroissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$

► ***démonstration***
u et v sont deux nombres réels tels que **u<v**, c'est à dire **v–u>0**, comparons f(u) et f(v)

u et v positifs : u ∈] 0; +∞ [; v ∈] 0; +∞ [

$f(u) - f(v) = \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{v}{uv} - \frac{u}{uv} = \frac{v-u}{uv}$

or, u<v donc v – u > 0

donc $\frac{v-u}{uv} > 0$

par suite, $f(u) - f(v) > 0$
donc $f(u) > f(v)$

ainsi, pour tous réels positifs u et v,
si u < v alors $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$

La fonction inverse est donc **décroissante** sur] 0 ; +∞ [

u et v négatifs : u ∈] –∞; 0 [; v ∈] –∞; 0 [

$f(u) - f(v) = \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{v}{uv} - \frac{u}{uv} = \frac{v-u}{uv}$

or, u<v donc v – u > 0

donc $\frac{v-u}{uv} > 0$

par suite, $f(u) - f(v) > 0$
donc $f(u) > f(v)$

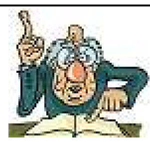
ainsi, pour tous réels négatifs u et v,
si u < v alors $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$

La fonction inverse est donc **décroissante** sur] –∞ ; 0 [

Tableau de variations de la fonction inverse :

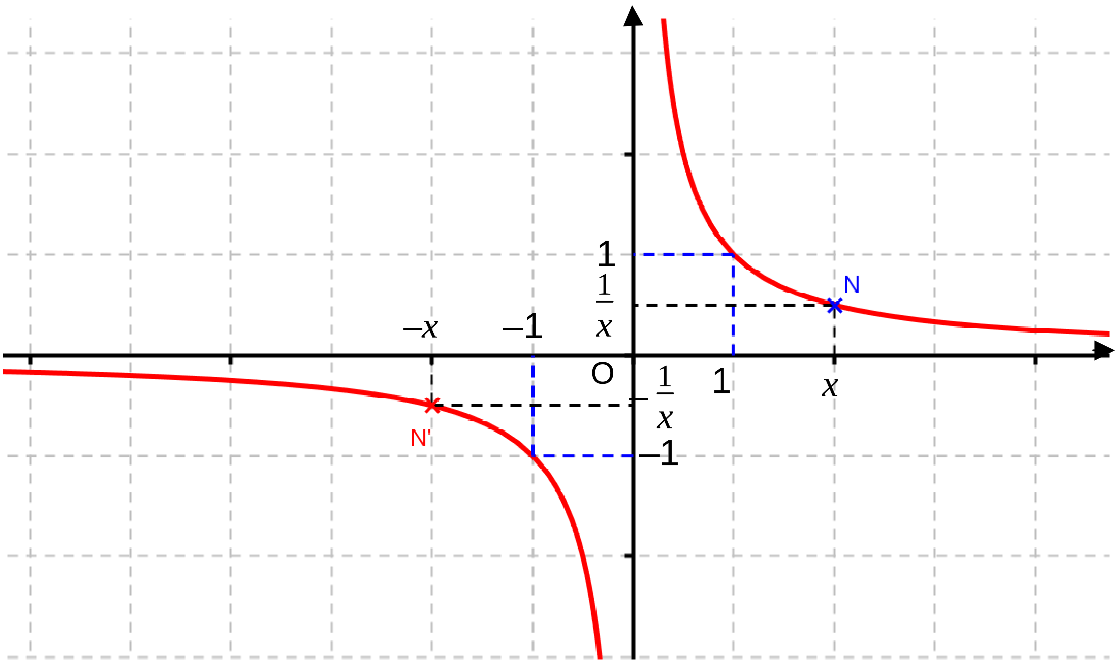
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

La double barre indique que la fonction inverse n'est pas définie pour 0.



Représentation graphique de la fonction inverse :

définition : Dans un repère, **la représentation graphique** de la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est **une hyperbole**.



théorème : Dans un repère d'origine O, la courbe de **la fonction inverse** admet **O comme centre de symétrie**.

► ***démonstration***

x est un nombre réel non nul.

Le point N $(x; \frac{1}{x})$ appartient à l'hyperbole.Le point symétrique de N par rapport l'origine O du repère est N' $(-x; \frac{-1}{x})$

Or, N' appartient également à l'hyperbole puisque l'inverse de $-x$ est $\frac{-1}{x}$

II) Fonctions homographiques :

définition : Soient a, b, c, d quatre nombres réels avec $c \neq 0$

Toute fonction f qui peut s'écrire sous la forme $f : x \longmapsto \dfrac{ax + b}{cx + d}$ est appelée **fonction homographique.** Sa courbe représentative est **une hyperbole**.

attention, la fonction est définie pour les valeurs de x **n'annulant pas** le dénominateur !

Ex : la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x - 5}{3x + 2}$ est une fonction homographique.

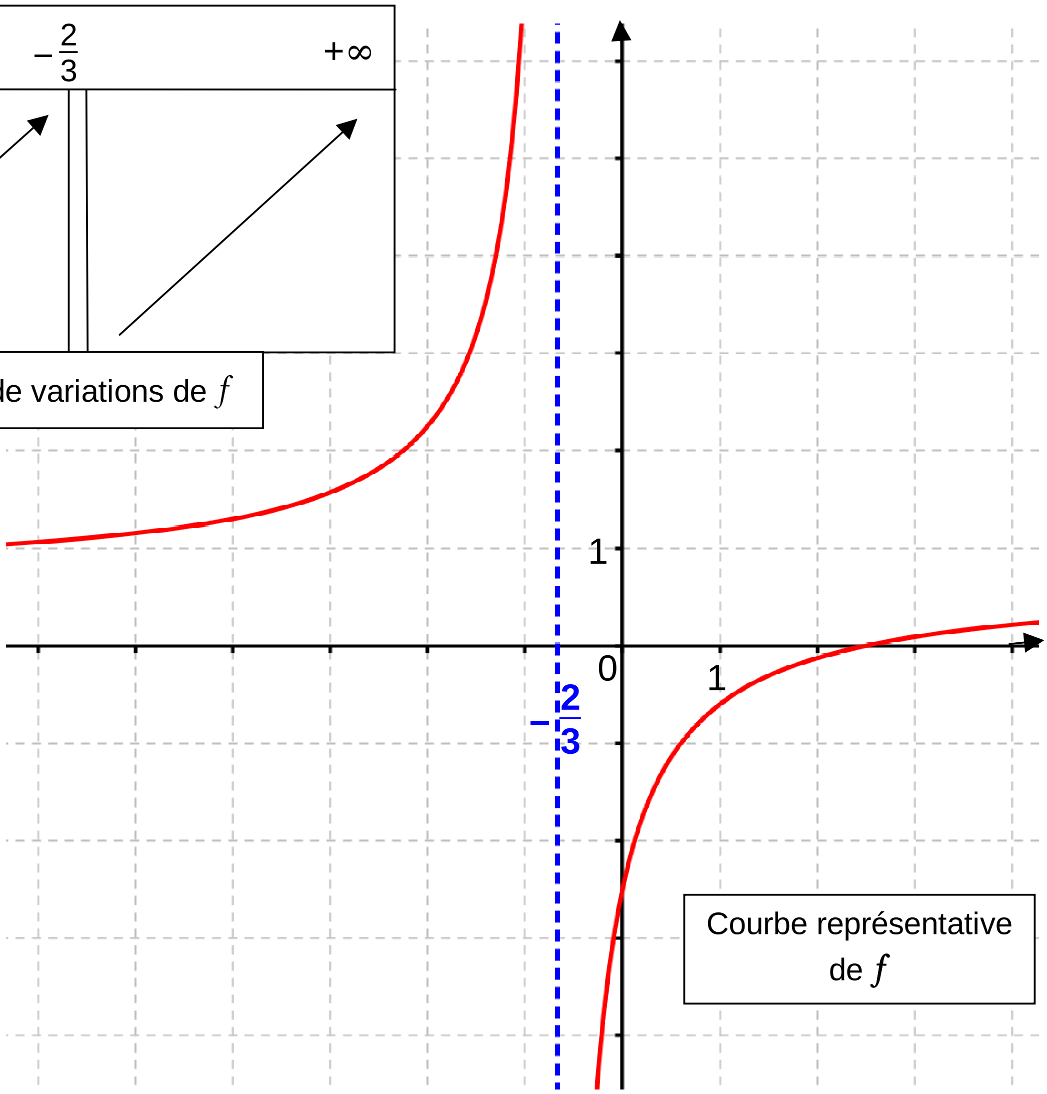
Elle est définie pour les nombres réels x tels que $3x + 2 \neq 0$ soit $x \neq -\dfrac{2}{3}$

La fonction f **est définie** sur l'intervalle $\left]-\infty\ ;\ -\dfrac{2}{3}\right[\cup \left]-\dfrac{2}{3}\ ;\ +\infty\right[$ ou $\mathbb{R} - \{-\dfrac{2}{3}\}$

$\mathbb{R} - \{-\dfrac{2}{3}\}$ peut aussi s'écrire $\mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{2}{3}\}$ et se lit "$\mathbb{R}$ privé de $-\dfrac{2}{3}$"

x	$-\infty$	$-\dfrac{2}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

Tableau de variations de f



Courbe représentative de f