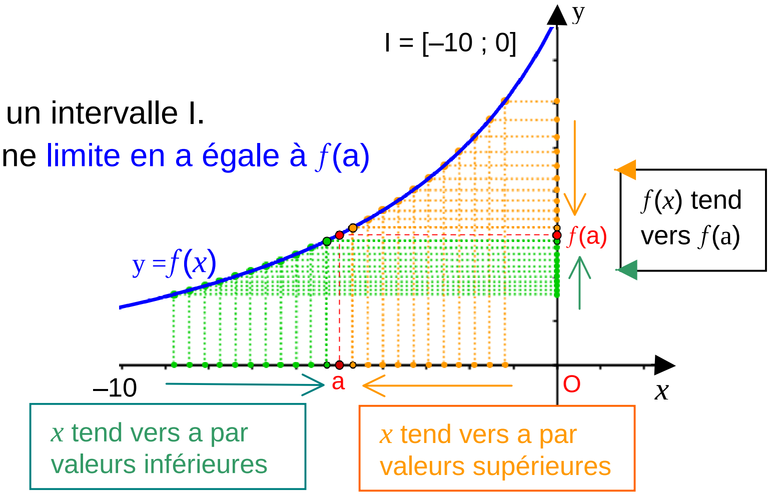
Fonctions continues - Fonctions dérivables

I) Fonctions continues :

a) continuité en un réel a :

définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
On dit que f est continue en a quand f a une limite en a égale à f(a)
On a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$



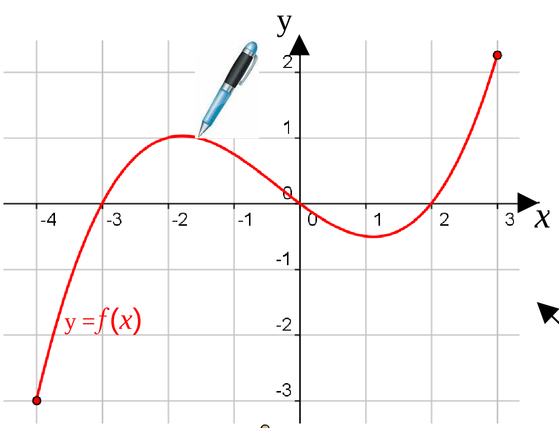
b) continuité sur un intervalle :

définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
On dit que f est continue sur l'intervalle I quand f est continue en tout nombre de I.

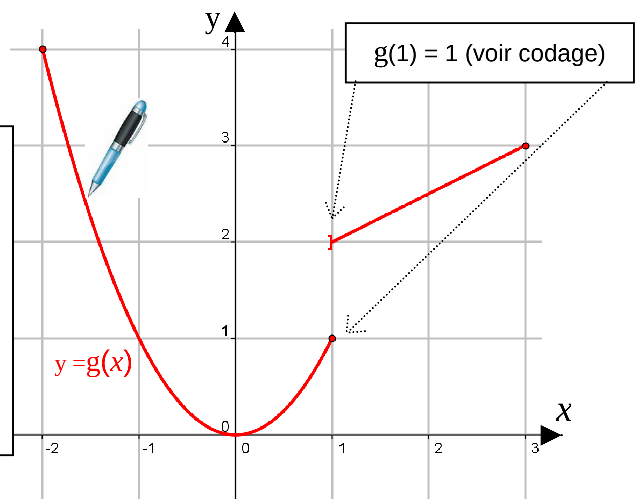
Ex : Ci-dessous, les représentations graphiques de deux fonctions f et g

la fonction f est continue sur [–4;3]

la fonction g n' est pas continue sur [–2;3]



Graphiquement, si je peux tracer la courbe d' une fonction sur un intervalle **sans lever le stylo**, c' est que la fonction est continue sur cet intervalle !!



Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, g(x) tend vers 1
Quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, g(x) tend vers 2 (or g(1) = 1)
Les limites **à gauche** et **à droite** de g en 1 sont **différentes**.
$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = 2$ ou $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$ mais $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = 1$ ou $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$ donc g n' est pas continue en 1!

c) dérivabilité et continuité :

propriétés (admises) :

Soient une fonction f définie sur un intervalle I et un réel a appartenant à I.

▶ Si f est dérivable en a, alors f est continue en a

▶ Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I

attention, les réciproques des propriétés précédentes sont **fausses**.
Une fonction peut être continue en un réel a sans être dérivable !

Ex : la fonction racine carrée est continue en 0, on a $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$

Pourtant, elle n'est pas dérivable en 0 !!

d) continuité des fonctions usuelles :

propriétés (admises) :

▶ les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elles sont continues sur $\mathbb{R}$

▶ la fonction inverse est dérivable sur chacun des intervalles $]0\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;0[$ donc elle est continue sur ces deux intervalles.

▶ la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$

▶ la fonction racine carrée est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, elle est donc continue sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Elle est aussi continue en 0 (voir encart précédent) donc la fonction racine carrée est continue sur $[0\,;+\infty[$

Toute fonction obtenue par **somme**, **produit**, **quotient** des **fonctions usuelles** est continue sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition.

Ex : ▶ Soit la fonction rationnelle f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x-5}{x-1}$

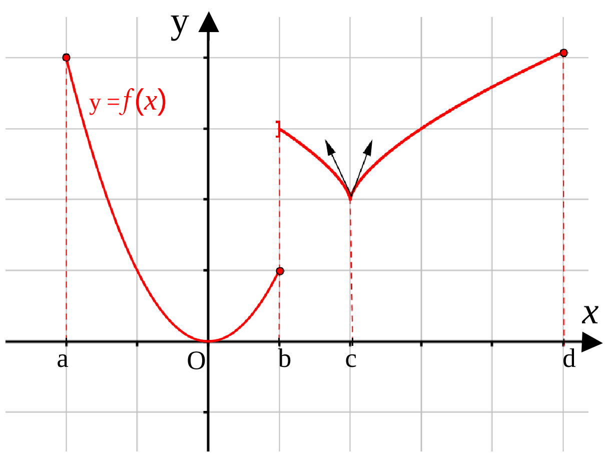
f est continue sur l' intervalle $I =]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ car elle est le quotient de deux fonctions polynômes continues sur $\mathbb{R}$.

les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$
donc elles le sont sur l'intervalle de définition !

▶ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 - 5)e^x$
g est le produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ donc g est continue sur $\mathbb{R}$.

remarque :
En observant ci - contre la représentation graphique de la fonction f on peut conjecturer que :

- f est continue sur [a,b]
- f est continue sur]b,d]
- f n' est pas continue en b
- f est continue en c mais n'est pas dérivable en c
  (la courbe présente 2 demi-tangentes distinctes au point d'abscisse c)



II) Théorème des valeurs intermédiaires :

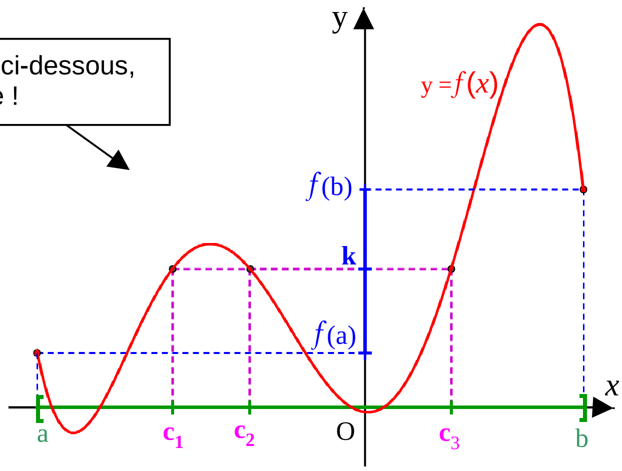
a) cas d'une fonction continue sur un intervalle fermé [a;b]:

Théorème des valeurs intermédiaires (admis) :
Soit une fonction f continue sur un intervalle [a;b] où a et b désignent deux nombres réels.
Pour tout nombre réel k compris entre f(a) et f(b), il existe au moins un nombre réel c compris entre a et b tel que f(c)=k

comme on peut le constater ci-dessous, c n'est pas forcément unique !

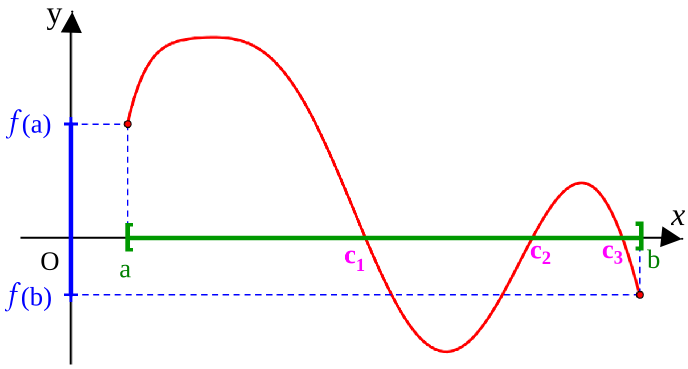
▶ si x varie de a à b, $f(x)$ prend toutes les valeurs intermédiaires entre f(a) et f(b) !

▶ le théorème permet d 'affirmer que **l'équation $f(x)$ = k** admet au moins une solution c dans l'intervalle [a;b] !
(dans notre exemple, elle en admet 3)



remarque :
Si f(a) et f(b) sont de signes contraires, alors il existe au moins un réel c tel que f(c)= 0

Dire que f(a) et f(b) sont de signes contraires revient à dire que : f(a) x f(b) < 0 !

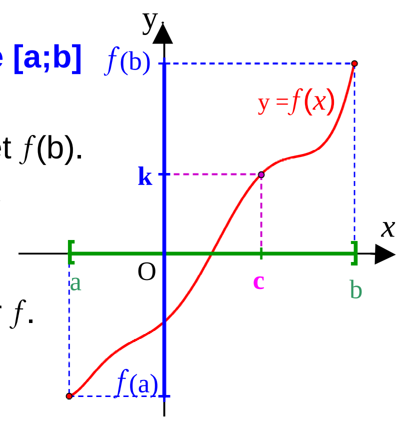


b) cas d'une fonction continue strictement monotone sur [a;b]:

rappel : "strictement monotone" signifie soit "strictement croissante", soit "strictement décroissante"

propriété :
Soit une fonction f continue et **strictement monotone** sur un intervalle [a;b] où a et b désignent deux nombres réels.
Pour tout nombre réel k compris entre f(a) et f(b),
l'équation **$f(x)$ = k admet une solution unique c dans l'intervalle [a;b]**

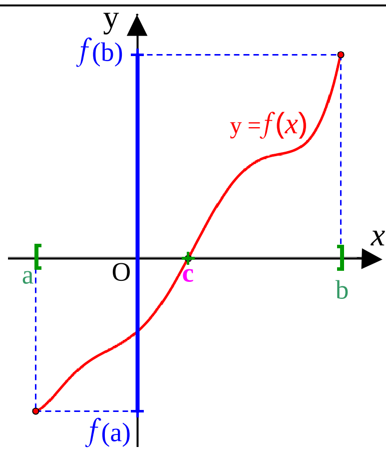
▶ ***démonstration***
f est continue sur [a;b]. Soit k, un nombre réel compris entre f(a) et f(b).
D' après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)$ = k admet au moins une solution c dans l'intervalle [a;b].
De plus, f est strictement monotone sur [a;b]
donc deux nombres distincts de [a;b] ont des images distinctes par f.
Par suite, c est l'unique solution de $f(x)$ = k dans l'intervalle [a;b]



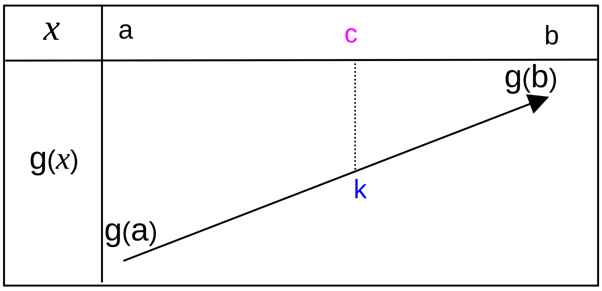
remarque :

Si f est une fonction continue, strictement monotone et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ a **une seule solution et une seule** dans [a;b]

f(a) et f(b) sont de signes contraires donc $0 \in [f(a);f(b)]$ ou à $[f(b);f(a)]$!



Ex : Le tableau de variations de la fonction g ci-dessous prouve que l'équation $g(x) = k$ a une unique solution c dans l'intervalle [a,b]



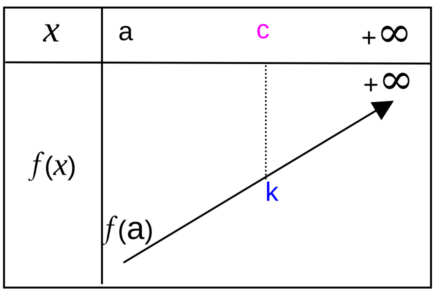
codage : la flèche (oblique) montre que la fonction est continue et strictement monotone (ici, strictement croissante)

b) extension de la propriété précédente à un intervalle quelconque :

La propriété précédente reste vraie dans le cas où une fonction f est continue, strictement monotone sur un intervalle I ouvert ou semi-ouvert, ayant des bornes réelles ou infinies.

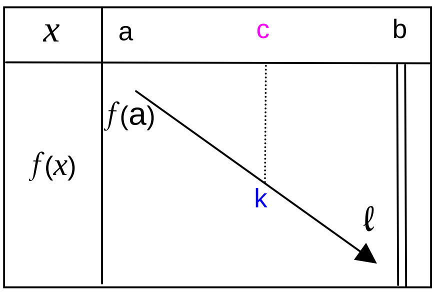
Ex : Les tableaux de variations ci-dessous prouvent dans chaque cas que l'équation $f(x) = k$ a une unique solution c dans l'intervalle I considéré.

▶ I = [a, +∞[



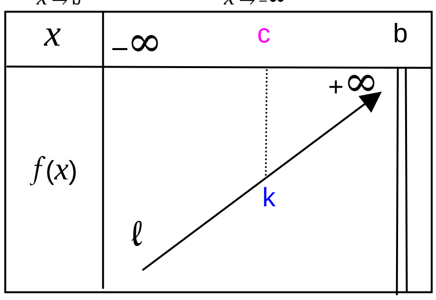
▶ I = [a, b[

▶ $\lim_{x \to b} f(x) = \ell$



▶ I =]−∞,b[

▶ $\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$



III) Calculs de dérivées (compléments) :

propriétés (admise) :

Pour tout réel x appartenant à I, $u(x)>0$

► Si u est une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

► Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction u^n, où n est un entier naturel non nul est dérivable sur I et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$

La propriété reste vraie si on considère que n est un entier relatif non nul **à condition que** la fonction u ne s'annule pas sur I !

Ex :

► la fonction g : $x \longmapsto \sqrt{5x-2}$ est définie sur l'intervalle $I = \left[\frac{2}{5}, +\infty\right[$.

$g(x) = \sqrt{u(x)}$ où u est la fonction définie par $u(x) = 5x - 2$.

u est une fonction affine donc dérivable !

u est dérivable sur I ($u'(x) = 5$) et strictement positive sur I

donc la fonction g est dérivable sur I et pour tout x de I, on a $g'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x-2}}$

► la fonction h : $x \longmapsto (3x-1)^5$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$h(x) = u^n(x)$ où n=5 et u la fonction définie par $u(x) = 3x - 1$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ ($u'(x) = 3$) donc la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel x, on a donc $h'(x) = 5(3x-1)^4 \times 3 = 15(3x-1)^4$

► la fonction k : $x \longmapsto (e^x)^{-3}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$k(x) = u^n(x)$ où n est l'entier relatif -3 et u la fonction définie par $u(x) = e^x$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ ($u'(x) = e^x$) et ne s'y annule pas,

donc la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$k'(x) = -3(e^x)^{-3-1} \times e^x = -3(e^x)^{-4} \times e^x = -3e^{-3x}$

propriété (admise) :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur l' intervalle u(I), alors la fonction w telle que $w(x) = v(u(x))$ est dérivable sur I .

On a alors $w'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$

Ex :

► la fonction g : $x \longmapsto \sqrt{e^x}$ est définie sur $]0 , +\infty[$

La fonction u : $x \longmapsto e^x$ et la fonction v : $x \longmapsto \sqrt{x}$ sont dérivables sur $]0 , +\infty[$.

La fonction g est donc dérivable sur $]0 , +\infty[$ et $g'(x) = e^x \times \dfrac{1}{2\sqrt{e^x}} = \dfrac{\sqrt{e^x}}{2}$