La fonction exponentielle

I) Définition de la fonction exponentielle :

propriété 1 :
Si f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$
alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

► ***démonstration***

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Désignons par g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) \times f(-x)$
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a
$g'(x) = f'(x) \times f(-x) + (f(-x))' \times f(x) = f(x) \times f(-x) - f(-x) \times f(x) = 0$
donc g est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Or, $g(0) = f(0) \times f(0) = 1$
Par suite, pour tout nombre réel x, $g(x) = f(x) \times f(-x) = 1$
donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

nous allons nous intéresser à cette fonction pour montrer que f ne peut pas s'annuler !

propriété 2 :
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$

► ***démonstration*** - *exigible* ROC -

1► L'existence de la fonction f est admise

conformément au programme !

2► Démontrons l'unicité de f (raisonnement par l'absurde)
Supposons qu'il existe deux fonctions f et g dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que $f' = f$; $g' = g$; $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$.
Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
h est bien définie puisque g ne s'annule pas (voir propriété 1). De plus, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ étant donné qu'il est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on a $h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} = \dfrac{f(x)g(x) - g(x)f(x)}{(g(x))^2} = 0$
Donc h est constante sur $\mathbb{R}$. Or $h(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$
Par suite, pour tout réel x, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ donc $f(x) = g(x)$. Il existe donc une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

définition :
L'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ est la fonction exponentielle. On la note $f = \exp$.

conséquences : Soit $x \in \mathbb{R}$

► $\exp'(x) = \exp(x)$	► $\exp(0) = 1$	◄(voir définition)
► $\exp(x) \neq 0$	► $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$	◄(voir propriété 1)

II) Propriétés de la fonction exponentielle :

propriété 1 :

Pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

la fonction exponentielle transforme les sommes en produit !
cette propriété est appelée *relation fonctionnelle de l'exponentielle* !

► ***démonstration***

Soit un réel a donné et la fonction h_a telle que pour tout réel x,

$h_a(x) = \exp(x + a)\exp(-x)$. h_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$h_a'(x) = \exp'(x + a)\exp(-x) + \exp'(-x)\exp(x + a)$

$= \exp(x + a)\exp(-x) - \exp(-x)\exp(x + a) = 0$ donc h_a est une constante.

Or, $h_a(0) = \exp(a)$. Par suite, pour tout réel x, $\exp(x + a)\exp(-x) = \exp(a)$

Donc, $\exp(x + a) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(-x)}$ or $\dfrac{1}{\exp(-x)} = \exp(x)$ donc $\exp(x + a) = \exp(x)\exp(a)$

conséquence de la définition précédente !

propriété 2 :

Pour tous réels x et y, $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

► ***démonstration***

Pour tous réels x et y, $\exp(x - y) = \exp(x + (-y))$ donc, d'après la propriété précédente, $\exp(x - y) = \exp(x)\exp(-y) = \exp(x) \times \dfrac{1}{\exp(y)} = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

propriété 3 :

Pour tout réel x et tout entier relatif p, $\exp(px) = \left[\exp(x)\right]^p$

on se limite d'abord aux entiers relatifs positifs !

► ***démonstration***

► Démontrons préalablement par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\exp(nx) = \left[\exp(x)\right]^n$

Soit la propriété P_n : «$\exp(nx) = \left[\exp(x)\right]^n$», avec $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

Pour n=0, pour tout réel x, on a $\exp(0x) = \exp(0) = 1 = \left[\exp(0)\right]^0$ $(\exp(0) \neq 0)$

donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel quelconque fixé.

Supposons que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après l' hypothèse de récurrence, $\exp(nx) = \left[\exp(x)\right]^n$,

donc $\exp(nx)\exp(x) = \left[\exp(x)\right]^n \exp(x)$. Or, $\exp(nx)\exp(x) = \exp(nx + x)$ (propriété 1)

donc $\exp(nx + x) = \left[\exp(x)\right]^{n+1}$, soit $\exp\left[(n + 1)x\right] = \left[\exp(x)\right]^{n+1}$.

Par suite, P_{n+1} est vraie.

Conclusion : La propriété P_n étant vraie au rang 0 et étant héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n.

► Démontrons à présent l'égalité pour un entier relatif négatif m.

Il existe un entier naturel n tel que m=–n. On a donc, pour tout réel x,

$$\exp(mx) = \exp(-nx) = \frac{1}{\exp(nx)} = \frac{1}{\left[\exp(x)\right]^n} = \left[\exp(x)\right]^{-n} = \left[\exp(x)\right]^m.$$

n appartient à $\mathbb{N}$!

On a donc démontré la propriété 3.

III) Une nouvelle notation de la fonction exponentielle :

définition : On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle.
On a donc $\exp(1) = e$

$e \simeq 2{,}718$

> Pour tout réel x et tout entier relatif p, $\exp(px) = [\exp(x)]^p$ (voir paragraphe précédent)
> donc, pour x=1, $\exp(p) = \exp(p \times 1) = [\exp(1)]^p = e^p$. Étendons cette égalité à tous les réels !

convention : Pour tout réel x, $\exp(x) = e^x$

> « exponentielle de x» ou « e exposant x»

Les propriétés s'écrivent alors plus simplement :
Pour tous réels x et y, pour tout entier relatif p,

▶ $e^0 = 1$ ▶ $e^1 = e$ ▶ $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ ▶ $e^{x+y} = e^x e^y$ ▶ $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ ▶ $(e^x)^p = e^{px}$

IV) Etude de la fonction exponentielle :

a) sens de variation :

propriété 1 :
Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$

▶ ***démonstration***

Pour tout réel x, $e^x = e^{2 \times \frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ donc e^x est positif.
Par suite, $e^x > 0$ (e^x est non nul)

propriété 2 :
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

▶ ***démonstration***
Pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x) = e^x$. Or, $e^x > 0$ (voir propriété précédente),
donc, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

> Donc, pour tous réels a, b :
> ▶ $a < b$ si et seulement si $e^a < e^b$ (on peut adapter l'équivalence pour $>$, $\leqslant$, $\geqslant$)
> ▶ $a = b$ si et seulement si $e^a = e^b$
> Très utile pour la résolution d'équations et d'inéquations !
> Ex :
> **Résolvons l' équation : $e^x = \dfrac{1}{e^5}$**
>
> $e^x = \dfrac{1}{e^5}$ équivaut à $e^x = e^{-5}$ équivaut à $x = -5$
>
> **Résolvons l' inéquation : $e^2 - e^x > 0$**
> $e^2 - e^x > 0$ équivaut à $-e^x > -e^2$ équivaut à $e^x < e^2$ équivaut à $x < 2$

b) limites

propriété 3 :

1► $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ 2► $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

► ***démonstration*** - *exigible* ROC -

1► Démontrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$:

Nous allons utiliser un théorème de comparaison (voir "limites de fonctions")

Considérons les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ $f : x \longmapsto e^x$ et $g : x \longmapsto x$

Pour les comparer, nous allons étudier la fonction $h = f - g$

h est dérivable pour tout réel x et on a $h'(x) = (e^x - x)' = e^x - 1$, donc

$h'(x) \geqslant 0$ équivaut à $e^x - 1 \geqslant 0$ équivaut à $e^x \geqslant 1$ équivaut à $e^x \geqslant e^0$ équivaut à $x \geqslant 0$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		−	0	+	
$h(x)$		↘	1	↗	

On constate que la fonction h admet sur $\mathbb{R}$ un minimum : le nombre 1.

Donc, pour tout réel x, $e^x - x > 0$ soit $e^x > x$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, par suite $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

(théorème de comparaison)

2► Démontrons que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$:

On pose $X = -x$. On a donc $e^x = e^{-X}$

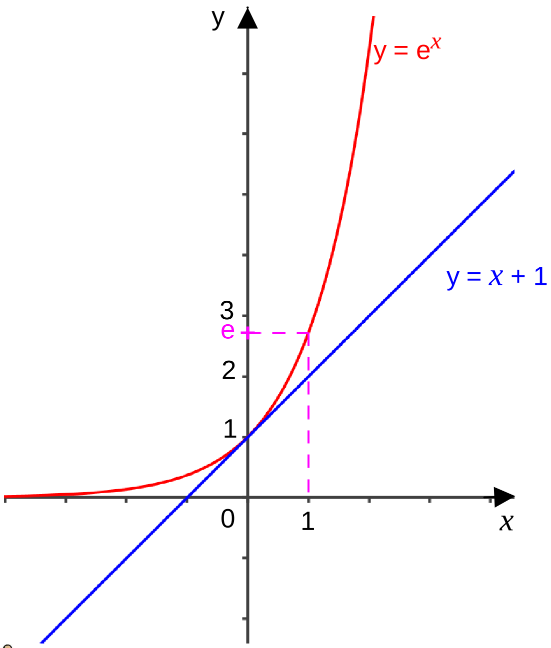
Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X}$

or, d'après la propriété de la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$

On peut donc conclure que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

b) tableau de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		+	
$\exp(x)$	0	↗	$+\infty$



► $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe de la fonction exponentielle en $-\infty$

► la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0)$ donc $y = x + 1$

La tangente à la courbe de f en un point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

IV) Compléments sur la fonction exponentielle :

a) limites à connaître :

propriété : 1► $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ 2► $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ 3► $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

► ***démonstration***

1► Nous allons utiliser un théorème de comparaison (voir "limites de fonctions")

Considérons les deux fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$ par $f : x \longmapsto e^x$ et $g : x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$

Pour les comparer, nous allons étudier la fonction h = f – g

h est dérivable pour tout réel x et on a $h'(x) = \left(e^x - \dfrac{x^2}{2}\right)' = e^x - \dfrac{2x}{2} = e^x - x$

Or, pour tout réel x, $e^x > x$ (voir propriété 3 du paragraphe précédent) donc $h'(x) > 0$

$h(0) = e^0 - 0 = 1$!

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	
$h(x)$	1 ↗	

La fonction h est strictement croissante et pour tout réel x strictement positif, on a donc $h(x) > 1 > 0$.

Par suite, $e^x - \dfrac{x^2}{2} > 0$ soit $e^x > \dfrac{x^2}{2}$ donc $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

(théorème de comparaison)

2► Démontrons que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

On pose $X = -x$. On a donc $xe^x = -Xe^{-X} = -\dfrac{X}{e^X}$

Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ (voir précédemment),

donc $\lim\limits_{X \to +\infty} -\dfrac{X}{e^X} = \lim\limits_{X \to +\infty} -\dfrac{1}{\left(\dfrac{e^X}{X}\right)}$

or, d'après la propriété de la limite de la composée de deux fonctions,

$\lim\limits_{X \to +\infty} -\dfrac{1}{\left(\dfrac{e^X}{X}\right)} = 0$,

On peut donc conclure que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

3► Démontrons que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x - 0}$, limite du taux d'accroissement de la fonction exponentielle entre 0 et 0 + x quand x tend vers 0.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ est l'expression du nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0,

c'est à dire exp'(0). Or $\exp'(0) = e^0 = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

b) <u>fonctions</u> e^u:

<u>propriété (admise) :</u> Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction e^u est dérivable sur I et $\left(e^u\right)' = u'e^u$

<u>Ex :</u> Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3x + 2}$
$f(x)$ est bien de la forme $e^{u(x)}$ avec $u(x) = -3x + 2$ (donc u dérivable sur $\mathbb{R}$)
Par suite, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f\,'(x) = -3e^{-3x + 2}$