Géométrie vectorielle

I) Vecteurs dans l'espace :

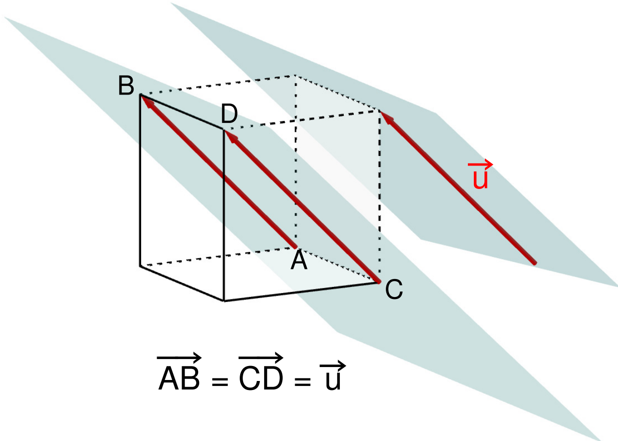
a) notion de vecteur dans l'espace :

On reprend la définition du vecteur dans le plan en l'étendant à l'espace.

définition : Soit un couple (A ; B) de points de l'espace.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur de la translation qui transforme A en B.

► Si $A \neq B$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a :
- pour direction celle de la droite (AB)
- pour sens celui de A vers B
- pour longueur (norme) la distance AB.

On écrit $||\overrightarrow{AB}|| = AB$.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{u}$

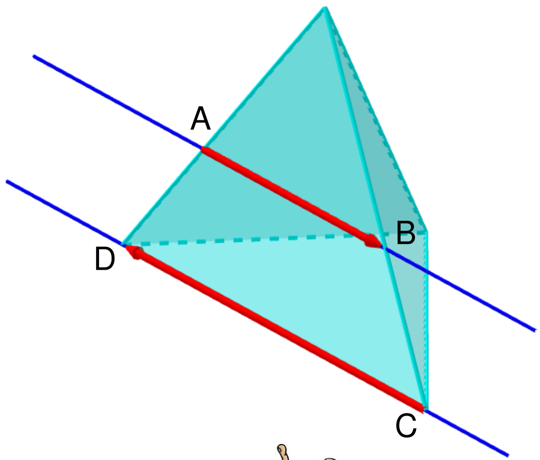
► Si A = B, $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul.
On écrit $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

définition : - **égalité de vecteurs -**
Soient deux vecteurs non nuls
► $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à «ABDC est un parallélogramme»
► on peut noter le vecteur par une lettre comme $\vec{u}$ sans préciser ni origine, ni extrémité. Dans ce cas, on dira que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants de $\vec{u}$.

$\vec{u}$ a une infinité de représentants !

propriété : Les opérations sur les vecteurs de l'espace et les règles de calcul (y compris la relation de Chasles) sont les mêmes que celles établies avec les vecteurs du plan.

b) vecteurs colinéaires :



définition :
On reprend la définition de la colinéarité de deux vecteurs dans le plan en l'étendant à l'espace.
Deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

propriété : Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur !

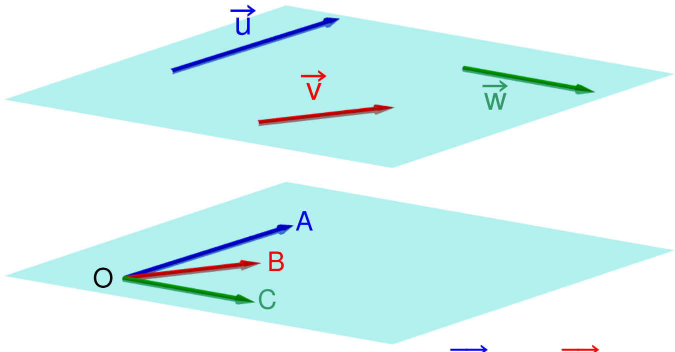
propriété : Trois points distincts A, B, C sont alignés si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

cela revient à montrer que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires !

c) vecteurs coplanaires :

définition : Des vecteurs sont coplanaires si et seulement si les représentants obtenus à partir d'un même point O quelconque ont leurs extrémités contenues dans un même plan.

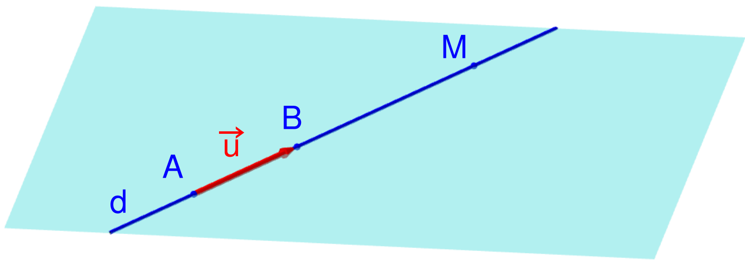
deux vecteurs sont toujours coplanaires (attention, ce n'est pas toujours le cas pour deux droites !)



$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires. $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$, et A, B, C sont dans un même plan.

II) Caractérisation vectorielle d'une droite de l'espace :

propriété : Soient A et B deux points distincts de l'espace.
Un point M appartient à la droite (AB) si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$



Comme dans le plan, on peut définir une droite d par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$.
$\vec{u}$ est nommé vecteur directeur de la droite d. On peut noter cette droite (A ; $\vec{u}$).

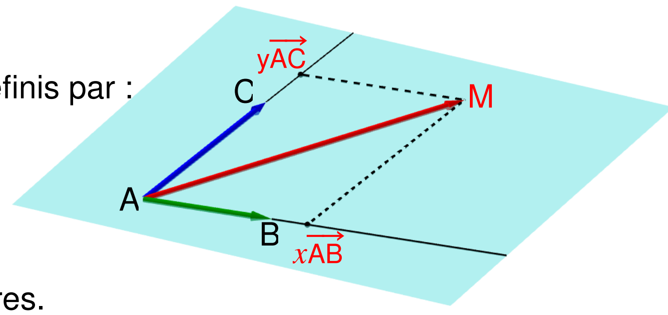
propriété : Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

III) Caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace :

propriété : Soient A, B, C trois points non alignés.
Le plan (ABC) est constitué de tous les points M définis par :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

(x et y sont des nombres réels quelconques)



► ***démonstration***

Dans le plan (ABC), $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Donc, (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) est un repère du plan.
Par suite, pour tout point M du plan (ABC) il existe deux nombres réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

réciproquement, nous allons montrer qu'un point M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ est un point du plan. Etant donné que (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) est un repère de (ABC), il existe N, un point du plan (ABC), tel que $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
Donc, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$ et M = N. Par suite, M est un point du plan (ABC)

vocabulaire :
Un plan $\mathscr{P}$ peut donc être défini par un point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On peut alors noter $\mathscr{P}$ sous la forme (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs du plan.

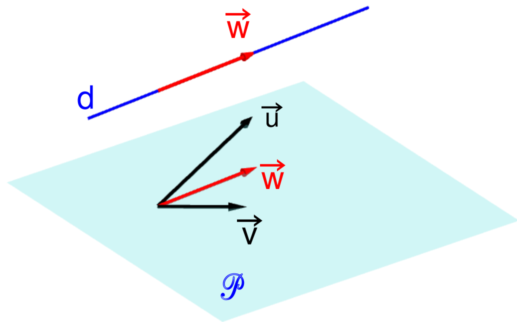
propriété : Soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe des nombres réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

► ***démonstration***
Soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires.
Soit A un point quelconque de l'espace et B, C, D tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$.
Etant donné que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, A, B, C, ne sont pas alignés et définissent le plan (ABC). $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si A, B, C, D sont coplanaires ce qui revient à dire que D appartient au plan (ABC).
Donc, (voir propriété précédente), il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.
Par suite, $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

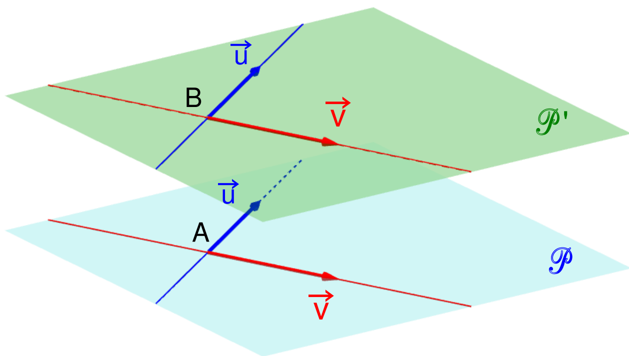
conséquences :

► 4 points A, B, C, D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

► une droite d de vecteur directeur $\vec{w}$ est parallèle à un plan $\mathscr{P}$ de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.

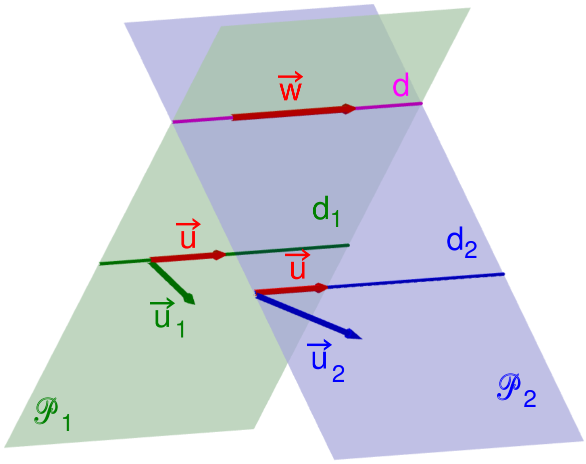


propriété :
Deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ayant deux vecteurs directeurs en commun sont parallèles.



► ***démonstration***
Soient deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ayant les mêmes vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Soient A un point de $\mathscr{P}$ et B un point de $\mathscr{P}'$.
Les deux droites sécantes de $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles aux deux droites sécantes de $\mathscr{P}'$ passant par B et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Par suite, les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.

une application :
la démonstration du théorème du toit



rappel de la propriété :
Si deux plans sécants $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants suivant une droite d et si d_1 et d_2 sont deux droites parallèles incluses respectivement dans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, alors d est parallèle aux droites d_1 et d_2.

► ***démonstration*** *- exigible* ROC -

d$_1$ et d$_2$ sont parallèles par définition !

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de d_1 et de d_2.
Soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de d.
Soient $(\vec{u},\vec{u}_1)$ et $(\vec{u},\vec{u}_2)$ deux couples de vecteurs directeurs respectivement des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

d'après la première des deux propriétés précédentes !

► d est contenue dans $\mathscr{P}_1$ donc il existe deux réels a_1 et b_1 tels que $\vec{w} = a_1\vec{u} + b_1\vec{u}_1$
► d est contenue dans $\mathscr{P}_2$ donc il existe deux réels a_2 et b_2 tels que $\vec{w} = a_2\vec{u} + b_2\vec{u}_2$
Par suite, $a_1\vec{u} + b_1\vec{u}_1 = a_2\vec{u} + b_2\vec{u}_2$ et $(a_1 - a_2)\vec{u} = b_2\vec{u}_2 - b_1\vec{u}_1$

Supposons que $a_1 \neq a_2$:
On aurait alors $\vec{u} = \dfrac{b_2}{a_1 - a_2}\vec{u}_2 - \dfrac{b_1}{a_1 - a_2}\vec{u}_1$ ce qui reviendrait à dire que $\vec{u}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ sont coplanaires. Or, c'est impossible car les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
Donc $a_1 = a_2$

Il découle de ce qui précède que $\cancel{a_1}\vec{u} + b_1\vec{u}_1 = \cancel{a_2}\vec{u} + b_2\vec{u}_2$ donc $b_1\vec{u}_1 = b_2\vec{u}_2$
Or, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires donc $b_1 = b_2 = 0$

Par suite, $\vec{w} = a_1\vec{u}$ et il en résulte que d_1 et d_2 sont parallèles.

deux droites ayant des vecteurs directeurs colinéaires sont parallèles !

IV) Repérage dans l'espace :

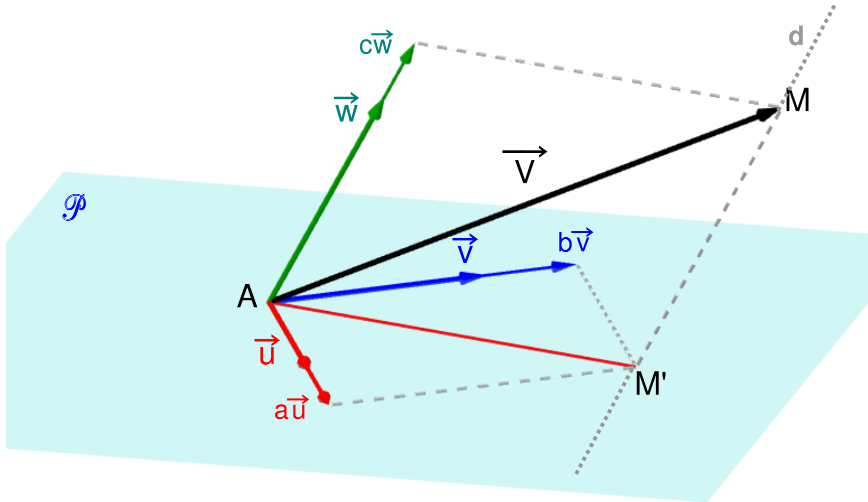
a) décomposition d'un vecteur suivant trois vecteurs non coplanaires :

propriété :
Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ non coplanaires de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{V}$, il existe un unique triplet (a; b ; c) de nombres réels tel que :

$$\vec{V} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

► ***démonstration***

► *existence de a, b, c*



Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ non coplanaires de l'espace.
Soit A un point de l'espace.
Soit $\overrightarrow{V}$ un vecteur de l'espace.
Soit $\mathscr{P}$ le plan défini par (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).
Soit le point M tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{AM}$.
Soit d la droite contenant M et de vecteur directeur $\vec{w}$.

d et $\mathscr{P}$ ne sont pas parallèles puisque $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires. Soit M' le point d'intersection de d et $\mathscr{P}$.
$\mathscr{P}$ contient M' donc il existe deux nombres réels a et b tels que $\overrightarrow{AM'} = a\vec{u} + b\vec{v}$
De plus, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'M}$. Or, $\overrightarrow{M'M}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires donc il existe un réel c tel que $\overrightarrow{M'M} = c\vec{w}$
Par suite, $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$

► *unicité de a, b, c*

Supposons qu'il existe deux triplets de réels (a, b, c) et (a', b', c') tels que
$\overrightarrow{V} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = a'\vec{u} + b'\vec{v} + c'\vec{w}$
Supposons que $c \neq c'$, on aurait $\vec{w} = \dfrac{a-a'}{c'-c}\vec{u} + \dfrac{b-b'}{c'-c}\vec{v}$, or c'est impossible puisque $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires. Donc c=c'.
Il en découle que $a\vec{u} + b\vec{v} = a'\vec{u} + b'\vec{v}$.
Par suite, a = a' et b= b' puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

b) repère de l'espace - coordonnées :

définition :
Un repère de l'espace (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est formé d'un point O et d'un triplet ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) de vecteurs non coplanaires.
O est l'origine du repère
($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est appelé base de vecteurs de l'espace.

propriété : (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est un repère de l'espace.
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels (x ; y ; z) tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

(x ; y ; z) sont les coordonnées de M dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

x est l'abscisse de M, y est l'ordonnée de m, z est la cote de M

► ***démonstration*** $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ne sont pas colinéaires donc, d'après la propriété précédente, $\overrightarrow{OM}$ se décompose de façon unique à l'aide des trois vecteurs.

propriété (**conséquence de la précédente**) **:** $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. De la même façon que nous le faisions dans le plan, on définira les coordonnées de $\vec{u}$ dans l'espace comme étant celles de M. On peut donc affirmer :
Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x ; y ; z)$ tel que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$(x ; y ; z)$ sont les coordonnées de $\vec{u}$. On note $\vec{u}\,(x ; y ; z)$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

règles de calculs avec les coordonnées :

Soient $\vec{u}\,(x ; y ; z)$ et $\vec{v}\,(x' ; y' ; z')$

► Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x' ; y + y' ; z + z')$

► Pour tout réel k, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx ; ky ; kz)$

► Soient les points $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$
$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$

► Soient les points $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$
Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_B + x_A}{2} , \dfrac{y_B + y_A}{2} , \dfrac{z_B + z_A}{2}\right)$

V) Représentation paramétrique d'une droite :

rappel : nous avons vu au paragraphe II qu'un point M appartient à la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ non nul si, et seulement si, il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$

k est le paramètre correspondant au point M !

propriété : $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.
Soit une droite d définie par un point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(a ; b ; c)$
On appelle représentation paramétrique de la droite d le système :

$$\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

La droite d est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ vérifiant le système ci-dessus.

► ***démonstration***

Si $M(x ; y ; z)$ est un point de d, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$.
On traduit l'égalité en utilisant les coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ d'où } \begin{cases} x - x_A = ka \\ y - y_A = kb \\ z - z_A = kc \end{cases} \text{ et, par suite, on a le résultat, } \begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}$$

De la même façon, on peut définir la représentation paramétrique d'un plan défini par un point $A(x_A;y_A;z_A)$ et 2 vecteurs non colinéaires $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(a',b',c')$.
On écrit alors qu'un point M appartient au plan si $\overrightarrow{AM} = k\vec{u} + t\vec{v}$ et on obtient le système :

$$\begin{cases} x = x_A + ka + ta \\ y = y_A + kb + tb \\ z = z_A + kc + tc \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R} \text{ et } t \in \mathbb{R}$$