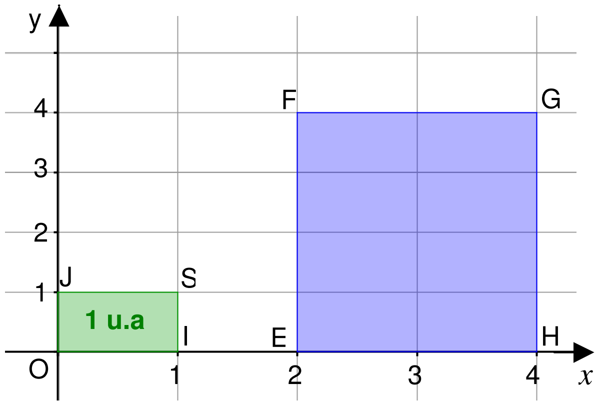
# Intégration et Primitives

## I) Intégrale d'une fonction continue positive :

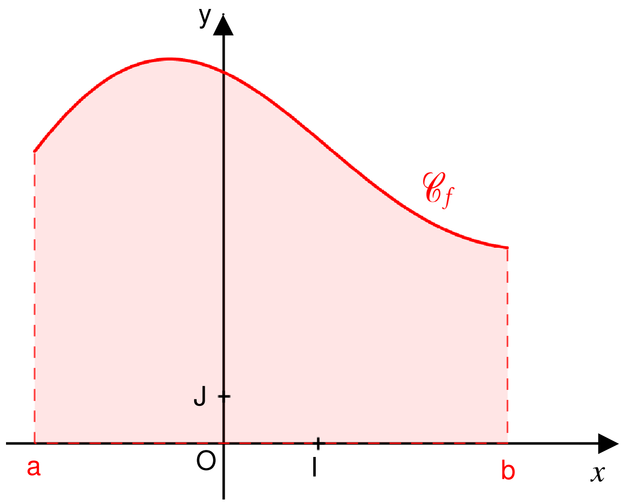
### a) unité d'aire :




**définition :** Le plan est muni d'un repère orthogonal (O; $\overrightarrow{OI}$,$\overrightarrow{OJ}$).
Soit S le point de coordonnées (1;1).
L'unité d'aire (notée u.a) est l'aire du rectangle OISJ.

L'aire du rectangle EFGH est égale à 8 (8 unités d 'aire ou 8 u.a) !

### b) domaine sous une courbe :

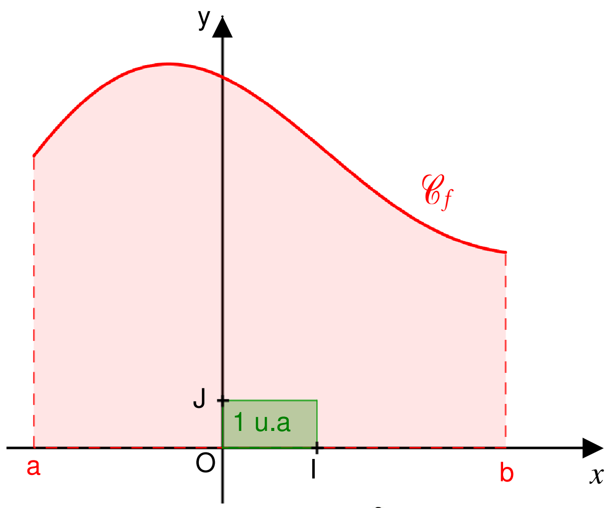



**définition :** Le plan est muni d'un repère orthogonal (O; $\overrightarrow{OI}$,$\overrightarrow{OJ}$).
Soit une fonction $f$ continue et positive sur un intervalle [a ; b].
Appelons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans le repère considéré.
Le domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$ est l'ensemble de tous les points M($x$ ; y)

tels que $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$

Le domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$ est la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x$ = a et $x$ = b !

### c) intégrale d'une fonction $f$ continue et positive :




**définition :** Le plan est muni d'un repère orthogonal (O; $\overrightarrow{OI}$,$\overrightarrow{OJ}$). Soit une fonction $f$ continue et positive sur un intervalle [a ; b].
L'intégrale de la fonction $f$ sur [a ; b] est l'aire (**exprimée en unités d'aire**) du domaine situé sous $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de $f$.

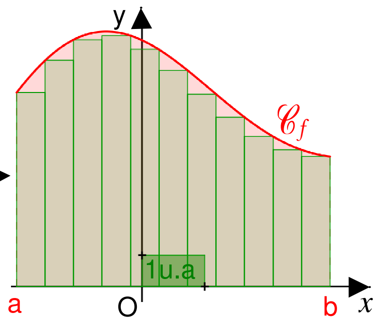
Dans notre exemple, l'intégrale de la fonction $f$ sur [a ; b] est environ égale à 32,53.
Comment la déterminer ?

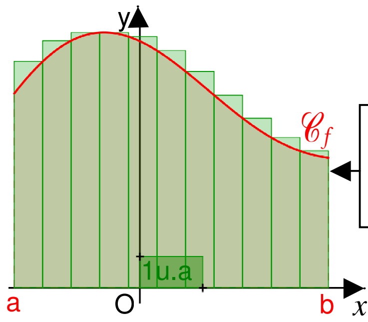
## d) notation de l'intégrale :

introduite par le mathématicien Leibniz au 17ème siècle !

Pour comprendre la notation adoptée, évoquons le calcul approché d'une intégrale par la méthode des rectangles. Le principe est de partager la plus grande partie possible du domaine sous la courbe en rectangles de même largeur. Une valeur approchée de l'intégrale sera alors obtenue en faisant la somme des aires des rectangles.

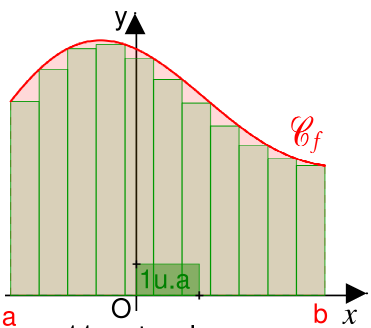
méthode des rectangles à gauche



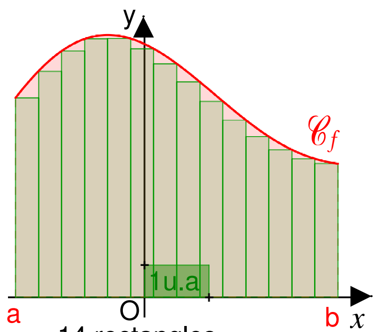




méthode des rectangles à droite

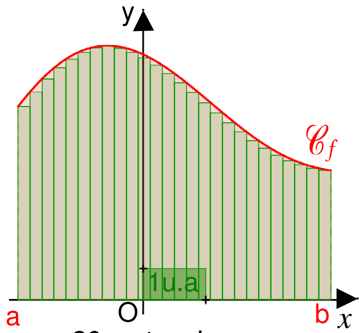
2 manières de construire les rectangles ! Dans un cas, on obtiendra une valeur approchée par défaut, dans l'autre une valeur approchée par excès !



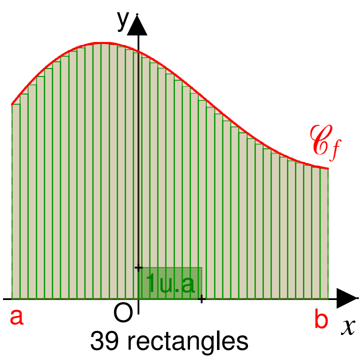

11 rectangles




14 rectangles




26 rectangles




39 rectangles

Plus les rectangles sont nombreux (la largeur choisie est de plus en plus petite), plus l'estimation de l'intégrale est précise !

L'intégrale de la fonction $f$ sur [a ; b] est notée $\int_a^b f(x)\,dx$

On la lit «intégrale de a à b de $f(x)d(x)$» ou « somme de a à b de $f(x)d(x)$»

Le symbole $\int$ est une sorte de "S" étiré. Il signifie "**s**omme".

$f(x)$**d**$(x)$ correspond au calcul de l'aire d'un rectangle de longueur $f(x)$ et de largeur $d(x)$ (variation infinitésimale de $x$).

► a et b sont les bornes d'intégration

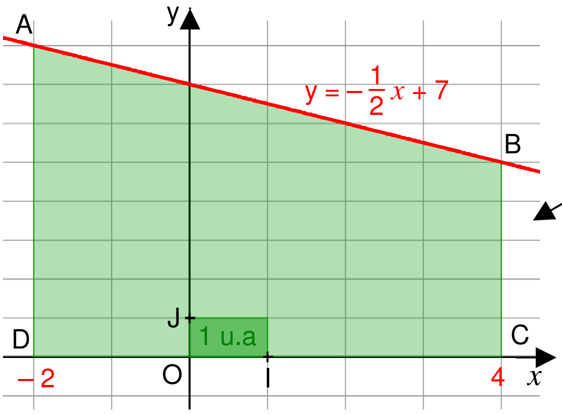
► $x$ est la variable d'intégration. Elle est muette car elle n'intervient pas dans le résultat. On peut donc utiliser d'autres lettres.

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du =$ etc....

► Si a = b, $\int_a^a f(x)\,dx = \int_b^b f(x)\,dx = 0$

le domaine sous la courbe se réduit à un segment !

Ex : Soit la fonction g définie sur [–2;4] par $g(x) = -\frac{1}{2}x + 7$




le domaine sous la courbe a la forme d'un trapèze ABCD ! Son aire est $\mathcal{A} = \frac{AD + BC}{2} \times DC$ !

$$\int_{-2}^{4} g(x)\,dx = \frac{g(-2) + g(4)}{2} \times 6 = \frac{8+5}{2} \times 6 = 39$$

## II) Primitives d'une fonction continue :

appelé *Théorème fondamental de l'intégration* !

**théorème :**

Soit une fonction $f$ continue et positive sur un intervalle [a ; b].

La fonction F définie sur [a ; b] par $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ est dérivable sur [a ; b] et sa dérivée est la fonction $f$.

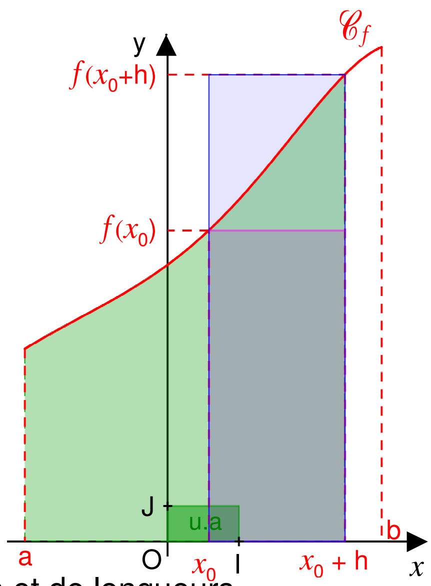
► ***démonstration*** - *exigible* ROC -

*La démonstration est faite dans le cas où $f$ est croissante sur [a;b], nous admettrons le théorème dans le cas général, pour toute fonction continue.*

Soit une fonction $f$ continue, positive et croissante sur [a;b]. Nommons $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de $f$ dans un repère orthogonal (O; $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$).

Soit $x_0$ un nombre réel de [a;b] et h un nombre réel non nul tel que $x_0 + h \in$ [a;b].

Soit F la fonction définie sur [a;b] par $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ .




► **Si h >0**

$f$ est croissante donc $f(x_0) \leqslant f(x_0 + h)$.

$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(x)\,dx$ est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et $\mathscr{C}_f$ sur [a ; $x_0$]

$F(x_0+h) = \int_a^{x_0+h} f(x)\,dx$ est l'aire entre l'axe des abscisses et $\mathscr{C}_f$ sur [a ; $x_0$ +h]

donc $F(x_0 + h) - F(x_0)$ est l'aire entre l'axe des abscisses et $\mathscr{C}_f$ sur [$x_0$ ; $x_0$ +h]

On encadre cette aire par les aires de deux rectangles de largeur h et de longueurs respectives $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$. Donc $h \times f(x_0) \leqslant F(x_0 + h) - F(x_0) \leqslant h \times f(x_0 + h)$

Donc $f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0 + h)$. Or, $f$ étant continue, $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

Par suite, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$.

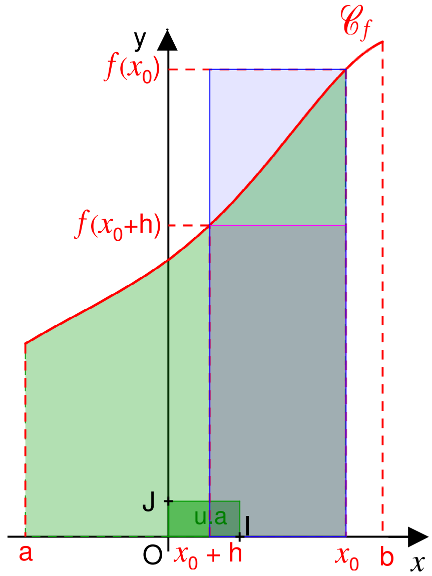
► **Si h < 0**

$f$ est croissante donc $f(x_0 + \text{h}) \leqslant f(x_0)$

$\text{F}(x_0) = \int_{\text{a}}^{x_0} f(x)\,\text{d}x$ est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et $\mathscr{C}_f$ sur [a ; $x_0$]

$\text{F}(x_0+\text{h}) = \int_{\text{a}}^{x_0+\text{h}} f(x)\,\text{d}x$ est l'aire entre l'axe des abscisses et $\mathscr{C}_f$ sur [a ; $x_0$ +h]

donc $\text{F}(x_0 + \text{h}) - \text{F}(x_0)$ est l'aire entre l'axe des abscisses et $\mathscr{C}_f$ sur $[x_0 ; x_0 + \text{h}]$




On peut encadrer cette aire par les aires de deux rectangles de largeur h et de hauteurs $f(x_0)$ et $f(x_0 + \text{h})$.

On a donc $\text{h} \times f(x_0) \leqslant \text{F}(x_0 + \text{h}) - \text{F}(x_0) \leqslant \text{h} \times f(x_0 + \text{h})$

Donc $f(x_0 + \text{h}) \leqslant \dfrac{\text{F}(x_0 + \text{h}) - \text{F}(x_0)}{\text{h}} \leqslant f(x_0)$. Or, $f$ étant continue, $\lim\limits_{\substack{\text{h} \to 0 \\ \text{h}<0}} f(x_0 + \text{h}) = f(x_0)$.

Par suite, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{\substack{\text{h} \to 0 \\ \text{h}<0}} \dfrac{\text{F}(x_0 + \text{h}) - \text{F}(x_0)}{\text{h}} = f(x_0)$.

$x_0$ étant un nombre réel quelconque, nous avons donc démontré que la fonction F est dérivable sur [a;b] et que pour tout $x$ de [a;b], $\text{F}'(x) = f(x)$.

**<u>définition</u>** : Soit $f$, une fonction continue sur un intervalle I.
Une primitive de $f$ sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $\text{F}' = f$

<u>Ex :</u> Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 2$

La fonction F par $\text{F}(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 2x + 7$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f$ car $\text{F}'(x) = f(x)$

La fonction $\text{F}_1$ par $\text{F}_1(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 2x + 9$ est aussi une primitive de $f$ car $\text{F}_1'(x) = f(x)$

**<u>propriété</u>** : Soit $f$, une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soit F une primitive de $f$ sur I. Soit $x \in$ I.
L'ensemble des primitives de $f$ sur I est l'ensemble des fonctions G telles que

$$\text{G}(x) = \text{F}(x) + \text{k} \ (\text{k} \in \mathbb{R})$$

► ***démonstration***

► Soit un réel k et soit la fonction G définie par $\text{G}(x) = \text{F}(x) + \text{k}$. G est dérivable sur I et $\text{G}'(x) = \text{F}'(x) + 0 = f(x)$, donc G est une primitive de la fonction $f$.

► Réciproquement, supposons que G est une primitive de $f$ sur I. $\text{G}'(x) = f(x) = \text{F}'(x)$.
Donc, la fonction G – F a une dérivée nulle puisque $(\text{G} - \text{F})'(x) = \text{G}'(x) - \text{F}'(x) = 0$.
Par suite, G – F est une fonction constante. Donc, il existe un réel k tel que $\text{G}(x) - \text{F}(x) = \text{k}$. Il en résulte que $\text{G}(x) = \text{F}(x) + \text{k}$.

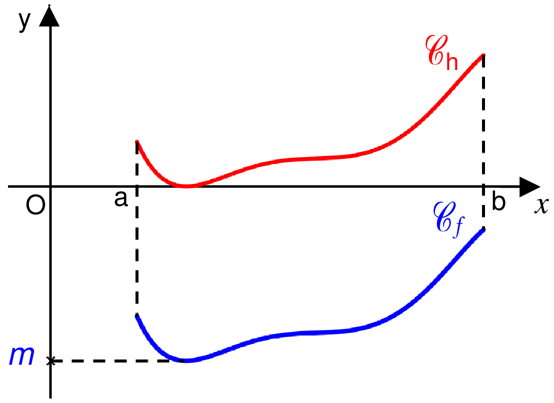
Ex : Reprenons l'exemple précédent.
Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 2$
L'ensemble des primitives de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions F de la forme $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + k$ ($k \in \mathbb{R}$)

## III) Calculs de primitives :

**théorème :** toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I

► ***démonstration*** - *exigible* ROC -

*La démonstration est faite dans le cas où $f$ est une fonction continue sur un intervalle fermé I = [a;b].*
*Nous admettrons le théorème dans le cas général, c'est à dire pour toute fonction continue sur un intervalle quelconque.*




La démonstration nécessite la prise en compte de la propriété suivante (*admise*): *toute fonction continue sur un intervalle [a;b] admet un minimum et un maximum sur [a;b]*

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle I = [a;b] et soit m son minimum sur [a;b]. Pour tout $x$ appartenant à I, on a donc $f(x) - m \geqslant 0$
La fonction h définie par $h(x) = f(x) - m$ est continue et positive. D'après le théorème du paragraphe précédent (théorème fondamental de l'intégration), h admet une primitive G sur I. On a donc, pour tout $x$ de I,
$G'(x) = h(x) = f(x) - m$. Par suite, la fonction F telle que $F(x) = G(x) + mx$ est dérivable sur I et $F'(x) = G'(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$.
Il en résulte que F est une primitive de $f$ sur I.

### a) primitives de fonctions usuelles :

obtenu par «lecture inverse» du tableau des dérivées usuelles !

| fonction | une primitive | intervalle sur lequel la fonction admet des primitives |
|---|---|---|
| $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$) | $kx$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^n}$ ou $x^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$) | $\frac{x^{-n+1}}{-n+1}$ | $]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$ |
| $f(x) = \frac{1}{x}$ (ou $x^{-1}$) | $\ln(x)$ | $]0 ; +\infty[$ |
| $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\sqrt{x}$ | $]0 ; +\infty[$ |
| $f(x) = \frac{-1}{x^2}$ | $\frac{1}{x}$ | $]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$ |
| $f(x) = e^x$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos(x)$ | $\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin(x)$ | $-\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ |

*conséquences :*
On déduit les deux propriétés suivantes des opérations sur les fonctions dérivables et de la définition d'une primitive :

▶ Si F et G sont les primitives respectives de deux fonctions $f$ et g sur un intervalle I alors F + G est une primitive de $f$ + g

▶ Soit un nombre réel k. Si F est une primitive d'une fonction $f$ sur un intervalle I et alors kF est une primitive de k$f$ sur I

Ex :
Déterminons une primitive de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = x^2 + 3\cos(x) - 3$
En utilisant le tableau précédent :

| fonction | primitive |
|---|---|
| $f(x) = k$ | $kx$ |
| $f(x) = x^n$ | $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ |
| $\cos(x)$ | $\sin(x)$ |

Une primitive de $x \longmapsto x^2$ est $x \longmapsto \dfrac{x^3}{3}$, une primitive de $x \longmapsto \cos(x)$ est $x \longmapsto \sin(x)$

et enfin une de $x \longmapsto -3$ est $x \longmapsto -3x$.
Donc, en utilisant les deux propriétés précédentes, une primitive F est définie sur $\mathbb{R}$

par $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 3\sin(x) - 3x$

b) primitives et opérations sur les fonctions usuelles :
Soit u, une fonction dérivable sur un intervalle I.

| fonction | une primitive |
|---|---|
| $u'u^n$ ($n \in \mathbb{N}$) | $\dfrac{1}{n+1} u^{n+1}$ |
| $\dfrac{u'}{u^n}$ (ou $u'u^{-n}$) ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$) | $\dfrac{1}{-n+1} \times u^{-n+1}$ |
| $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ (u strictement positive sur I) | $\sqrt{u}$ |
| $\dfrac{u'}{u}$ (u strictement positive sur I) | ln(u) |
| $u'e^u$ | $e^u$ |
| u'cos(u) | sin(u) |
| u'sin(u) | –cos(u) |

Ex : Déterminons une primitive F de la fonction $f$ dans les cas suivants :

▶ $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$ On reconnaît une fonction du type $\dfrac{u'}{u}$ avec u : $x \longmapsto x^2 + 4$

(pour tout réel $x$, u($x$) est strictement positif).
On a donc sur $\mathbb{R}$ une primitive F de $f$ telle que F : $x \longmapsto \ln(x^2 + 4)$

| fonction | primitive |
|---|---|
| $\dfrac{u'}{u}$ | ln(u) |

▶ $f(x) = 2x\sin(3x^2 + 5)$
On reconnaît **presque** une fonction du type u'sin(u).
Faisons apparaître la forme pratiquement reconnue.

| fonction | primitive |
|---|---|
| u'sin(u) | –cos(u) |

On a : $f(x) = 2x\sin(3x^2 + 5) = \dfrac{1}{3} \times 6x\sin(3x^2 + 5)$.

En posant u : $x \longmapsto 3x^2 + 5$, on obtient donc $f(x) = \dfrac{1}{3} \times u'(x) \times \sin(u(x))$.

On a donc sur $\mathbb{R}$ une primitive F de $f$ telle que F : $x \longmapsto -\dfrac{1}{3}\cos(3x^2 + 5)$.

## IV) Intégrale d'une fonction continue :

### a) cas d'une fonction continue et **positive** :

**propriété :** Soit $f$ une fonction définie, continue et positive sur un intervalle [a;b].
Si F est une primitive de $f$ sur [a;b], on a alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

le résultat ne dépend pas de la primitive choisie ! Si je prends G telle que G = F + k, on a G(b) – G(a) = F(b) + k – F(a) – k = F(b) – F(a) !

F(b) – F(a) se note également $[F(x)]_a^b$ !

► ***démonstration***

D'après le théorème fondamental de l'intégration (voir paragraphe II), la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ est une primitive de $f$ sur [a;b]. Il existe donc un nombre réel k tel que $G(x) = F(x) + k$. Or, $G(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$. Par suite, F(a) + k = 0.

Il en résulte que k = – F(a). On obtient donc $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) = F(b) + k = F(b) - F(a)$

Ex : Reprenons notre premier exemple (paragraphe Id).

Soit la fonction g définie sur [–2;4] par $g(x) = -\frac{1}{2}x + 7$. On a

$$\int_{-2}^4 \left(-\frac{1}{2}x + 7\right) dx = [F(x)]_{-2}^4 = \left[-\frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} + 7x\right]_{-2}^4 = F(4) - F(-2) =$$

$$-\frac{1}{2} \times \frac{4^2}{2} + 7 \times 4 - \left(-\frac{1}{2} \times \frac{(-2)^2}{2} + 7 \times (-2)\right) = 39$$

On retrouve le résultat obtenu en utilisant la formule d'aire du trapèze !

### b) cas général d'une fonction continue (extension de la propriété précédente) :

**définition :** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle I. Soient deux réels a et b de l'intervalle I. Soit F une primitive de $f$ sur I.
L'intégrale de la fonction $f$ sur [a;b] est le nombre réel F(b) – F(a) noté $\int_a^b f(x)\,dx$

on peut également dire «intégrale de a à b» ou «intégrale comprise entre a et b» !

*conséquences :* $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ et $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

On a en effet, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx$

D'autre part, $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$

Ex : Calculons l'intégrale $I = \int_{-4}^{1} \left(-x^2 - 3x + 4\right) \mathrm{d}x$

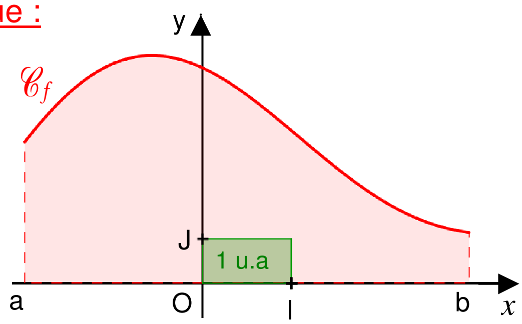
Une primitive F de $x \longmapsto -x^2 - 3x + 4$ sur $\mathbb{R}$ est F : $x \longmapsto -\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x$

On a donc

$$I = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_{-4}^{1}$$

$$= -\frac{1}{3} \times 1^3 - \frac{3}{2} \times 1^2 + 4 \times 1 - \left(-\frac{1}{3} \times (-4)^3 - \frac{3}{2} \times (-4)^2 + 4 \times (-4)\right) = \frac{125}{6}$$

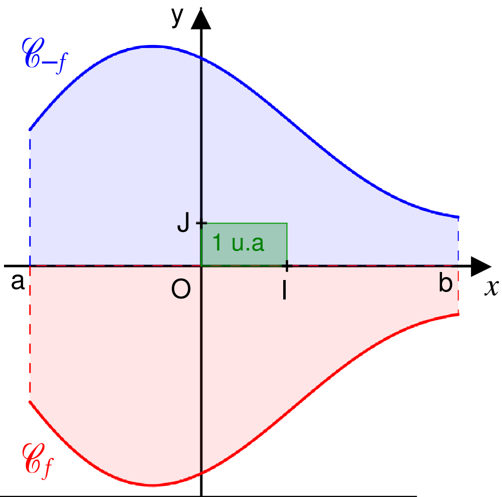
## c) intégrale et aire dans le cas général d'une fonction continue :




► une fonction $f$ continue et positive sur un intervalle [a;b]

Par définition, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$

► une fonction $f$ continue et négative sur un intervalle [a;b]




Le domaine compris entre l'axe des abscisses et $\mathscr{C}_f$ et celui compris entre l'axe des abscisses et $\mathscr{C}_{-f}$ ont des aires égales (les 2 domaines sont symétriques par rapport à (OI)).

Si F est une primitive de $f$, alors –F est une primitive de $-f$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = -[(-F(b))-(-F(a))] = -\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$$

donc $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à l'opposé de l'aire du domaine entre l'axe des abscisses et $\mathscr{C}_f$

en résumé: Soit une fonction $f$ continue sur un intervalle [a;b], $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique du domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe (positive si $f$ est positive, négative si $f$ est négative).

## d) relation de Chasles :

cette égalité est la relation de Chasles !

**propriété :** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle I.
Pour tous nombres réels a, b, c appartenant à I :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

► ***démonstration***

Soient $f$ une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c, trois nombres réels de I.

Soit F une primitive de $f$.

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

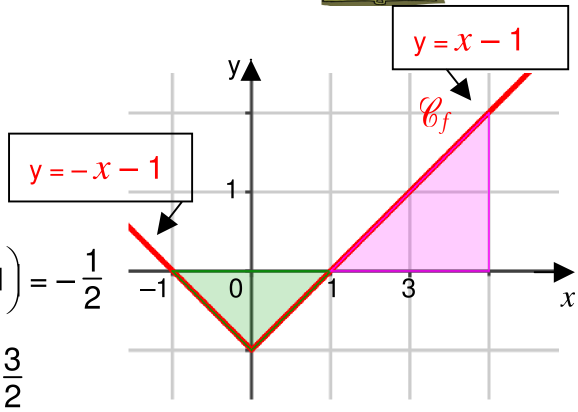
appelée fonction affine par morceaux !

Ex :

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x| - 1$

On peut la définir ainsi : $f(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x - 1 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$

Calculons l'intégrale $I = \int_{-1}^{3} f(x)\,dx$




► $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (-x-1)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{1}{2}$

► $\int_{0}^{3} f(x)\,dx = \int_{0}^{3} (x - 1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{0}^{3} = \left(\frac{9}{2} - 3\right) - 0 = \frac{3}{2}$

D'après la relation de Chasles,

$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} f(x)\,dx = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$

On peut faire le calcul en utilisant les aires :

L'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe quand $x \in [-1;1]$ est 1 donc $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = -\ 1$ ($f$ est négative sur l'intervalle considéré)

L'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe quand $x \in [1;3]$ est 2 donc $\int_{1}^{3} f(x)\,dx = 2$ ($f$ est positive sur l'intervalle considéré)

D'après la relation de Chasles, $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3} f(x)\,dx = -\ 1 + 2 = 1$

## V) Propriétés des intégrales :

**propriétés** : Soient $f$ et g deux fonctions continues sur un intervalle I.
Soit k un nombre réel. Soient a et b deux nombres réels de I.

1► $\int_{a}^{b} (f + g)(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{a}^{b} g(x)\,dx$

propriétés de linéarité de l'intégration !

2► $\int_{a}^{b} kf(x)\,dx = k\int_{a}^{b} f(x)\,dx$

► ***démonstrations*** Soient F et G deux primitives respectivement de $f$ et g.

1► $\int_{a}^{b} (f + g)(x)\,dx = [F(b) + G(b)] - [F(a) + G(a)]$

$= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] = \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{a}^{b} g(x)\,dx$

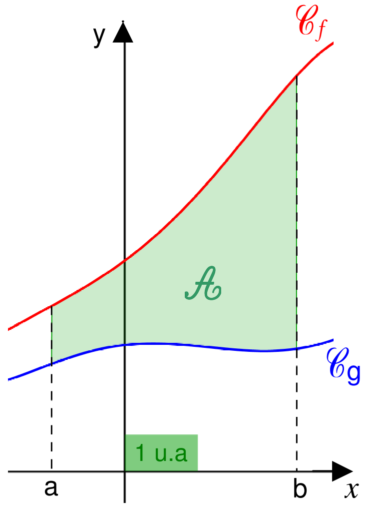
2► $\int_{a}^{b} kf(x)\,dx = k[F(b) - F(a)] = k\int_{a}^{b} f(x)\,dx$

*__une application__* :
Calcul de l'aire d'un domaine compris entre deux courbes sur un intervalle [a;b]

Soient $f$ et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle I.

Supposons que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$. L'aire $\mathscr{A}$ du domaine comprise entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur [a;b] est :

$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x$$




nous considérerons que le résultat reste valable dans le cas général !

__Ex :__

▶ Soient $f$ et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

autre manière d'exprimer que l'aire cherchée est comprise entre les deux courbes sur [1;5] !

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{11}{2}$ et $g(x) = \frac{1}{2}x + 4$.

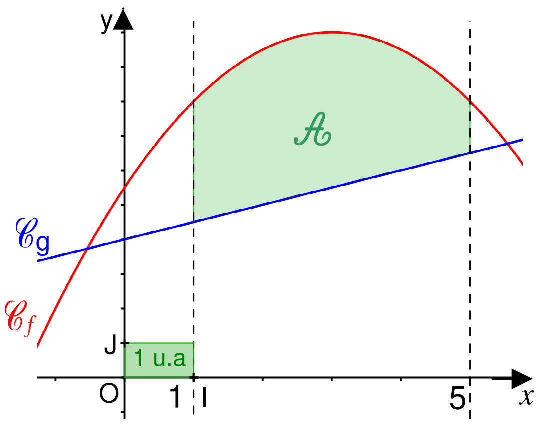
Déterminons l'aire $\mathscr{A}$ comprise entre $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$

$$\mathscr{A} = \int_1^5 (f-g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^5 \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\right]_1^5$$

$$= -\frac{1}{6} \times 5^3 + \frac{5}{4} \times 5^2 + \frac{3}{2} \times 5 + \frac{1}{6} \times 1^3 - \frac{5}{4} \times 1^2 - \frac{3}{2} \times 5$$

$$= \frac{46}{3} \text{ u.a}$$



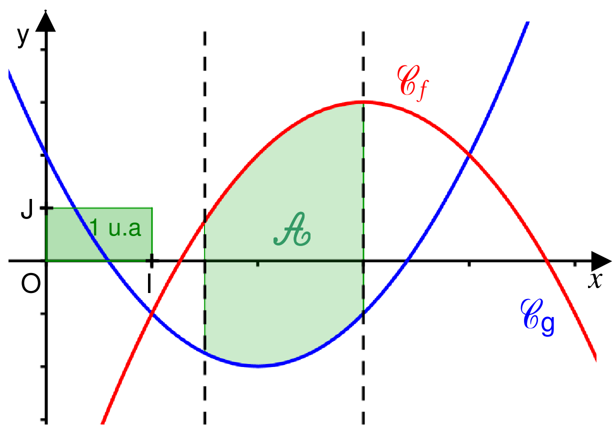

▶ Soient $f$ et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = -x^2 + 6x - 6$ et $g(x) = x^2 - 4x + 2$ .

Déterminons l'aire $\mathscr{A}$ comprise entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle [1,5 ; 3]

$$\mathscr{A} = \int_{1,5}^3 (f-g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1,5}^3 (-2x^2 + 10x - 8)\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 8x\right]_{1,5}^3 = 6 \text{ u.a}$$



**propriétés :** -Inégalités-

Soient $f$ et g deux fonctions continues sur un intervalle I.

Soient a et b deux nombres réels de I tels que $a \leqslant b$.

1► Si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x$ appartenant à [a;b] alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

2► Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x$ appartenant à [a;b] alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

► ***démonstrations***

1► Par définition, si $f$ est une fonction continue positive, $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses et $\mathscr{C}_f$ donc $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

2► On sait que $f(x) \leqslant g(x)$, donc $g - f \geqslant 0$. D'après la propriété précédente 1►, on a donc $\int_a^b (g-f)(x)\,dx \geqslant 0$. Par suite, $\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Il en résulte que $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

linéarité de l'intégration !

## VI) Valeur moyenne d'une fonction :

**définition :** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle [a;b] (avec a < b).

La valeur moyenne de $f$ sur [a;b] est le nombre $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

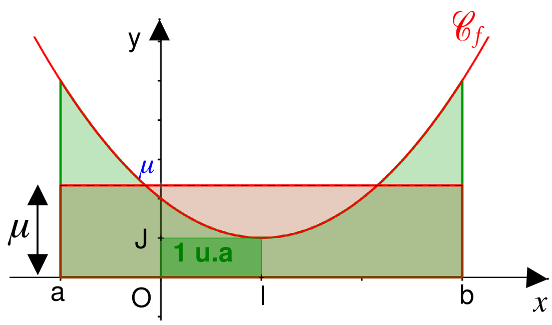
$\mu$ est une lettre grecque se lisant « mu » !

interprétation dans le cas d'un fonction positive :

On a $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ donc $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,\mu$

Dans le cas d'une fonction positive, $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire en dessous de $\mathscr{C}_f$.

Il en résulte que la valeur moyenne $\mu$ peut être considérée comme une des dimensions d'un rectangle dont l'autre dimension est b-a.




Ex :

La figure ci-dessus représente la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

a=–1 et b = 3. Calculons la valeur moyenne $\mu$ de $f$ sur [–1 ; 3]

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{3-(-1)}\int_{-1}^{3}\left(x^2 - 2x + 2\right)dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_{-1}^{3} = \frac{28}{3}$$

**<u>propriété :</u>**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels de I (avec a < b).
Si m et M sont deux nombres réels tels que pour tout $x$ de [a ; b], $m \leqslant f(x) \leqslant M$ alors

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$


► ***démonstration***

On sait que pour tout $x$ de [a ; b], $m \leqslant f(x) \leqslant M$.
Considérons les deux fonctions constantes $g : x \longmapsto m$ et $h : x \longmapsto M$

On a donc $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$.
Par suite, d'après la dernière propriété du paragraphe V, on a donc
$\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b h(x)\,dx$.

De plus, $\int_a^b g(x)\,dx = \left[mx\right]_a^b = m(b-a)$ et $\int_a^b h(x)\,dx = \left[Mx\right]_a^b = M(b-a)$

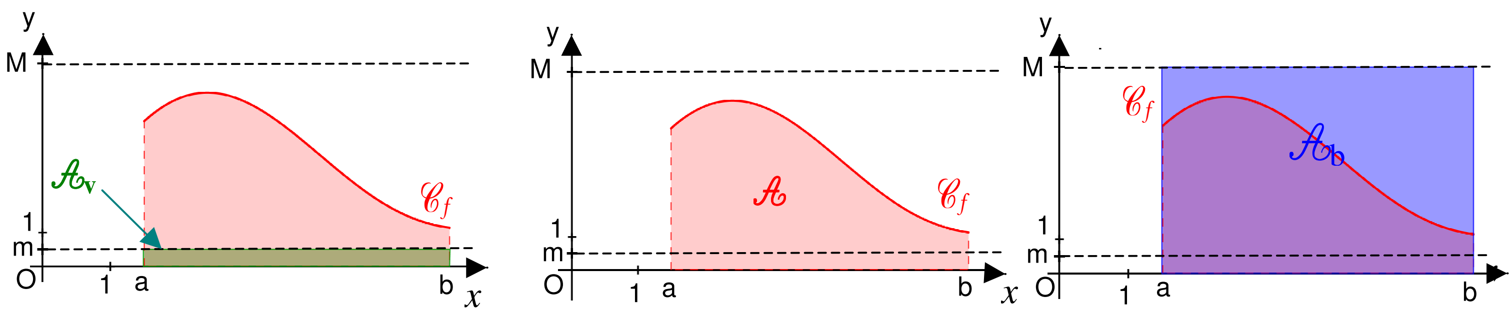
Il en résulte que $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$

L'inégalité permet d'encadrer la valeur moyenne $\mu$ de la fonction.
On divise chaque membre par (b – a) (positif puisque, par hypothèse, a<b). On obtient :

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M \text{ soit } m \leqslant \mu \leqslant M$$

<u>interprétation graphique dans le cas d'un fonction positive :</u>

L'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ est comprise entre les aires des rectangles dont une dimension commune est b – a et dont les autres dimensions sont respectivement m et M.




$$\mathcal{A}_v \leqslant \mathcal{A} \leqslant \mathcal{A}_b$$