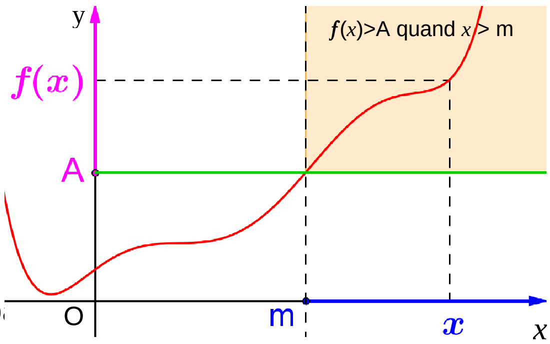
Limites de fonctions

I) Limite d'une fonction en $+\infty$:

quand x tend vers $+\infty$!

a) limite infinie :

définition : On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert $]A\,;+\infty[$ (A appartenant à $\mathbb{R}$) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Cela revient à dire que, pour tout réel A, il existe un réel m tel que si x > m alors $f(x)$ > A

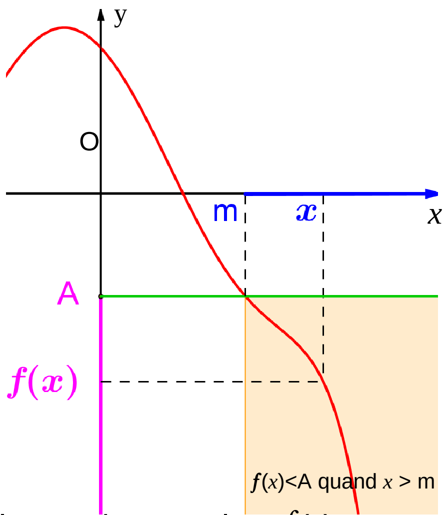
Ex : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ p

Montrons que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Il faut prouver que, pour tout réel A, il existe un réel m tel que, si x > m alors $f(x)$ > A.
Soit un réel A. $f(x)$ > A revient à dire que x^2 > A, ce qui équivaut à $x < -\sqrt{A}$ ou $x > \sqrt{A}$
On peut donc prendre m = $\sqrt{A}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

définition : On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert $]-\infty\,;A[$ (A appartenant à $\mathbb{R}$) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Cela revient à dire que, pour tout réel A, il existe un réel m tel que si x > m alors $f(x)$ < A



Ex : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x$

Montrons que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Il faut prouver que, pour tout réel A, il existe un réel m tel que, si x > m alors $f(x)$ < A.

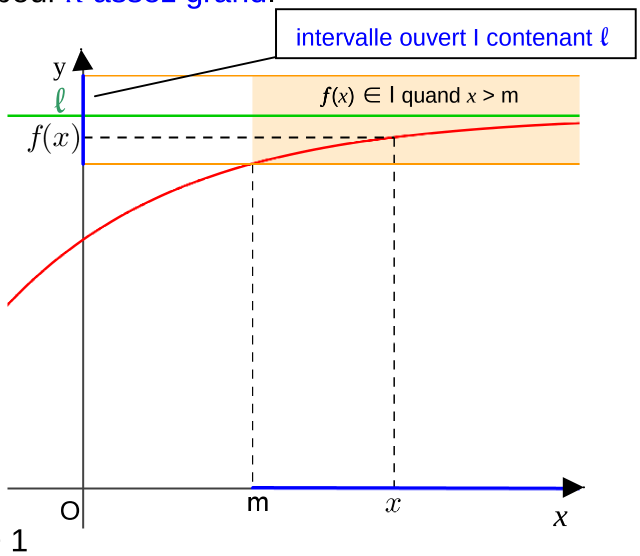
Soit un réel A. $f(x)$ < A revient à dire que $-2x$ < A, ce qui équivaut à $x > -\dfrac{A}{2}$

On peut donc prendre m = $-\dfrac{A}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

b) limite finie :

définition : On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$



Cela revient à dire que, pour tout intervalle ouvert I, il existe un réel m tel que si $x >$ m alors $f(x) \in$ A.
La droite d'équation y = ℓ est dite asymptote horizontale à la courbe représentant f en $+\infty$ (voir def plus bas).
(on peut également dire que la droite est **une** asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$)

Ex : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$

Montrons que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Il faut prouver que, pour tout intervalle ouvert I contenant 2, il existe un réel m tel que, si $x >$ m alors $f(x) \in$ I. Si un intervalle ouvert I contient 2, il s'écrit]2 – a ; 2 + b[avec a et b deux réels tels que a > 0 et b > 0.

la fonction inverse est décroissante !

$f(x) \in$ I équivaut à $2 - a < \dfrac{2x+1}{x} < 2 + b$ soit $2 - a < 2 + \dfrac{1}{x} < 2 + b$

c'est à dire $-a < \dfrac{1}{x} < b$. Or $x > 0$ par suite, $0 < \dfrac{1}{x} < b$ donc $x > \dfrac{1}{b}$

Donc, I contient tous les $f(x)$ pour un x assez grand (strictement supérieur à $\dfrac{1}{b}$)

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

définition :
La droite d'équation y= ℓ est asymptote horizontale à la courbe représentative d'une fonction f en $+\infty$ (resp $-\infty$) si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (resp $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$).

II) Limite d'une fonction en $-\infty$:

a) limite infinie :

définition : On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (resp $-\infty$) quand x tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle ouvert]A ; $+\infty$[(resp]$-\infty$; A[) (A appartenant à $\mathbb{R}$) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez petit. On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ (resp $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$)

x négatif et assez grand en valeur absolue ! !

b) limite finie :

On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez petit.

On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

▶ fonctions de référence de limite infinie en +∞ ou –∞:

Pour tout entier naturel n ⩾ 1,

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ **si n est impair** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ **si n est pair**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

▶ fonctions de référence de limite 0 en +∞ ou –∞ :

Pour tout entier naturel n ⩾ 1,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

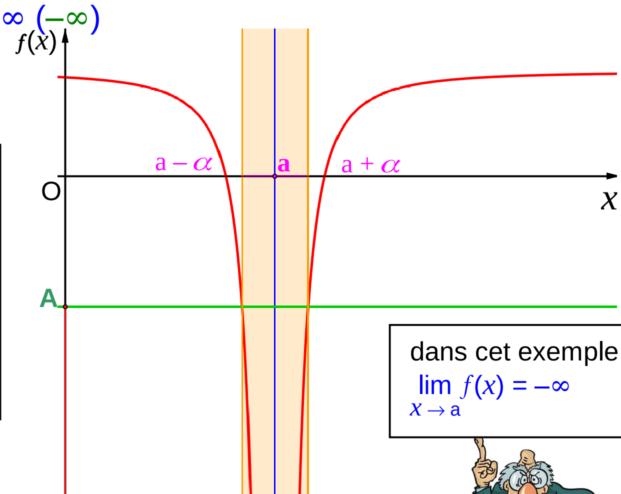
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

l'axe des abscisses est asymptote horizontale aux courbes de ces fonctions en +∞ et –∞

III) Limite d'une fonction en un réel a :

a) limite infinie :

définition : On dit que $f(x)$ tend vers +∞ (–∞) quand x tend vers a lorsque tout intervalle ouvert]A ; +∞[(]–∞ ; A[) (A appartenant à ℝ) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (–∞)



Cela revient à dire que $f(x)$ tend vers +∞ (resp –∞) pour tout réel A, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que si $x \in]a-\alpha\,;\,a+\alpha[$; alors $f(x) > A$ (resp $f(x) < A$).
La droite d'équation $x = a$ est dite asymptote verticale à la courbe représentant f en +∞ (resp –∞).
(voir def plus bas).

dans cet exemple, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Ex : Soit la fonction f définie sur]–∞ ; 0[U]0 ; +∞[par $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Montrons que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

Il faut prouver que, pour tout réel A, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que si $x \in]a-\alpha\,;\,a+\alpha[$; alors $f(x) > A$.

Soit un réel A> 0 (si A <0, $\frac{1}{x^2}$ est forcément strictement supérieur à A).

$\frac{1}{x^2} > A$ équivaut à $x^2 < \frac{1}{A}$ soit $-\frac{1}{\sqrt{A}} < x < \frac{1}{\sqrt{A}}$ (x étant différent de 0)

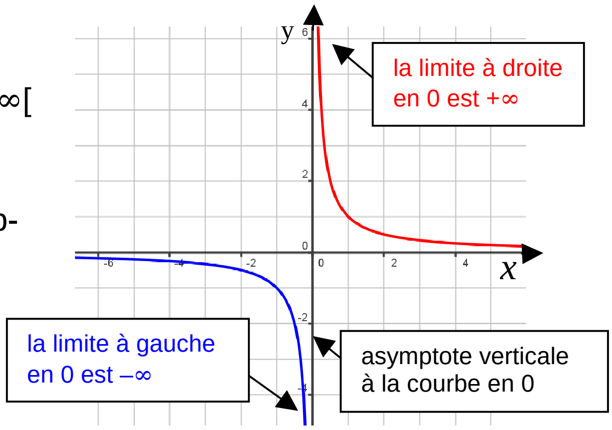
donc on peut prendre $\alpha = \frac{1}{\sqrt{A}}$.

]A ; +∞[contient tous les $f(x)$ pour x assez proche de 0 !

définition :
Quand une fonction f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en un nombre réel a *(éventuellement à gauche ou à droite)*, la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f en a.

b) limite à gauche, limite à droite :

Considérons la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$



En observant la représentation graphique, on peut observer que :

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ **quand $x > 0$**

et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ **quand $x < 0$**

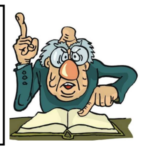
▶ quand $x > 0$:

Pour tout réel A >0, $\dfrac{1}{x} > A$ équivaut à $x < \dfrac{1}{A}$ donc l'intervalle $]A\ ;\ +\infty[$ contient tous les nombres $f(x)$ quand $x \in \left]0\ ;\ \dfrac{1}{A}\right[$. On dit alors que la limite à droite en 0 de la fonction f est $+\infty$. On note $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

▶ quand $x < 0$:

Pour tout réel A < 0, $\dfrac{1}{x} < A$ équivaut à $x > \dfrac{1}{A}$ donc l'intervalle $]-\infty\ ;\ A[$ contient tous les nombres $f(x)$ quand $x \in \left]\dfrac{1}{A}\ ;\ 0\right[$. On dit alors que la limite à gauche en 0 de la fonction f est $-\infty$. On note $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

> la fonction $\dfrac{1}{x}$ n' a pas de limite en 0 car les limites à gauche et à droite en 0 ne sont pas égales !



définition :
On dit qu'une fonction f admet une limite à droite (resp à gauche) de a quand f admet une limite quand x tend vers a avec $x > a$ (resp $x < a$).
Cette limite est notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$ (resp $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$)

> Si la limite à gauche de a est égale à celle à droite, on ne distingue pas les deux limites !

c) limite finie :

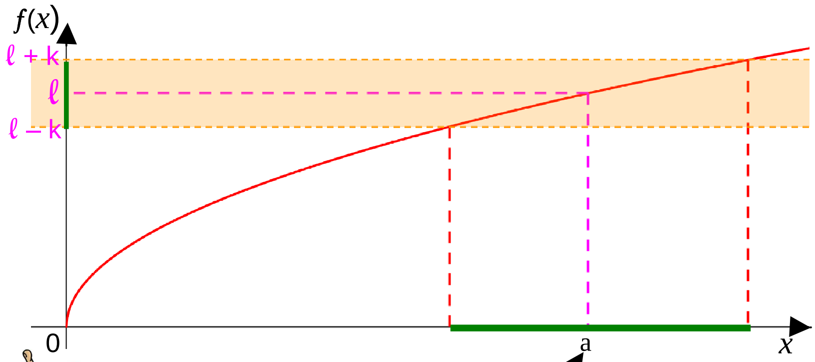
définition : On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a lorsque tout intervalle ouvert $]\,\ell - k\,;\,\ell + k\,[$ (k étant un réel strictement positif) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

propriétés (admises) :
a est un nombre réel

▶ si a > 0, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

▶ si P est une fonction polynôme, $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$

▶ si F est une fonction rationnelle définie en a, $\lim\limits_{x \to a} F(x) = F(a)$



quand x est choisi suffisamment proche de a, toutes les valeurs $f(x)$ sont contenues dans $]\,\ell - k\,;\,\ell + k\,[$!

Ex : Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,2[\ \cup\ ]2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x-3}{2x-4}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-3}{2x-4} = \frac{1-3}{2\times1-4} = \frac{-2}{-2} = 1$$

IV) Limites et opérations :

f et g sont deux fonctions dont la variable tend vers $+\infty$, $-\infty$, ou un réel a , ℓ et ℓ' sont deux nombres réels

propriété 1 *(admise)*: limite d'une somme

si lim f = ...	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
si lim g = ...	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors lim (f + g) = ...	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

On ne peut pas conclure directement, la forme est indéterminée. Dans ce cas, il faudra parvenir à lever l'indétermination !

propriété 2 *(admise)*: limite d'un produit

si lim f = ...	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
si lim g = ...	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
alors lim (f x g) = ...	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**	**?**

on utilise la règle des signes pour trouver le signe de la limite d'un quotient ou d'un produit !

propriété 3 *(admise)*: limite d'un quotient

g est telle que pour x, $g(x) \neq 0$

▶ quand $\lim g \neq 0$

si $\lim f =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
si $\lim g =$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim \frac{f}{g} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**

▶ quand $\lim g = 0$

si $\lim f =$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
si $\lim g =$	0 en étant positif	0 en étant positif	0 en étant négatif	0 en étant négatif	0
alors $\lim \frac{f}{g} =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**

Ex : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x - 2\sqrt{x}}{x^4 + 1}$

Déterminons $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2\sqrt{x}}{x^4 + 1}$

On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x - 2\sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 2\right) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^4 + 1 = +\infty$.

La forme est indéterminée "$\dfrac{\infty}{\infty}$". Nous allons lever l'indétermination en factorisant.

attention, suivant la situation, on pourra procéder de différentes façons !

$$f(x) = \frac{x - 2\sqrt{x}}{x^4 + 1} = \frac{x\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{x^4\left(1 + \frac{1}{x^4}\right)} = \frac{1}{x^3} \times \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x^4}}$$

or, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x^4}} = 1$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

V) Limites et comparaisons :

a) Théorème de comparaison (limite infinie):

f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I= $]A ; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}$

1▶ si pour tout x de I, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2▶ si pour tout x de I, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

le théorème s'adapte si les limites sont en $-\infty$ ou en un réel a, il suffit de changer la condition $x \to +\infty$

▶ ***démonstration***

1▶Soit A un nombre réel quelconque. On sait que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les $g(x)$ pour x supérieur à un nombre réel M (c'est à dire un x assez grand). $]A ; +\infty[$ contient donc aussi tous les $f(x)$ puisque $f(x) \geqslant g(x)$

donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2▶ On démontrerait de la même façon la deuxième partie du théorème.

Ex : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + \sin^2 x$

Pour tout x, $\sin^2 x \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant 3x$ or, $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x = +\infty$

donc, d'après le théorème précédent, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Théorème des gendarmes (théorème d'encadrement) : (admis)

f, g, h sont trois fonctions définies sur un intervalle I=]A ; $+\infty$[avec $A \in \mathbb{R}$ ou sur I=$\mathbb{R}$. ℓ est un nombre réel.

Si, pour tout x de I, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

le théorème s'adapte si les limites sont en $-\infty$ ou en un réel a, il suffit de changer la condition $x \to +\infty$

Ex : Soit la fonction f définie sur]0 ; $+\infty$[par $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$

Pour tout x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ donc $\dfrac{-1}{x} \leqslant \dfrac{\cos x}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$ donc $\dfrac{-1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$

or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$

Par suite, d'après le théorème précédent, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

VI) limite de la composée de deux fonctions - limite de la composée d'une suite et d'une fonction :

propriété 1 *(admise)* :

a, b, c sont des nombres réels ou désignent $+\infty$ ou $-\infty$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g[f(x)] = c$

Ex : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{5x^2 + 3x - 1}$

Déterminons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Soit $X = 5x^2 + 3x - 1$, on a donc $f(x) = \sqrt{X}$

Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$ donc, d'après le théorème précédent, $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{5x^2 + 3x - 1} = +\infty$

propriété 2 *(admise)* :

f est une fonction définie sur un intervalle I.

(u_n) est une suite dont tous les termes appartiennent à I.

a et b sont des nombres réels ou désignent $+\infty$ ou $-\infty$

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = a$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = b$

Ex : Déterminons la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{\dfrac{4n-3}{n+1}}$

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{4n-3}{n+1}$, on a $u_n = \sqrt{v_n}$.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = 4$ et $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$ donc, d'après le théorème précédent, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 2$

remarque : Si f est une fonction définie sur un intervalle I du type $]A ; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant A$ par $u_n = f(n)$. ℓ est un nombre réel ou désigne $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \ell$

Ex : Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel différent de 0 par $u_n = \dfrac{5}{n^2}$

On a ici $u_n = f(n)$ avec f, la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5}{x^2}$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Donc, d'après le théorème précédent, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$