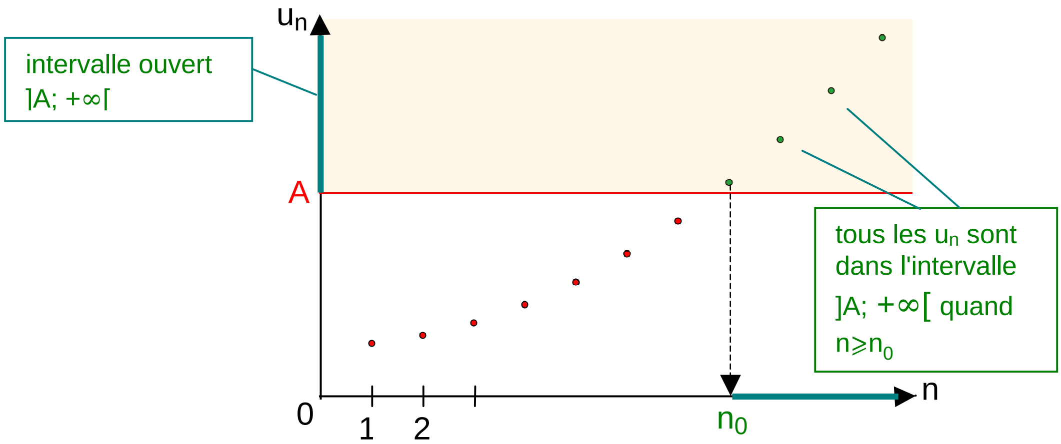
Limite d'une suite

I) Limite d'une suite :

a) limite infinie :

définition : Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (A étant un réel) contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang n_0. On note $\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n) = +\infty$

Cela revient à dire que pour tout nombre réel A, on peut trouver un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait $u_n > A$!
Un nombre A peut être aussi grand qu'on l'imagine, les termes u_n parviennent à le dépasser !



► **suites de référence de limite +∞** (résultats admis)
Soit k un nombre réel (k>0)
Les suites (kn), (kn^2), (kn^3), $(k\sqrt{n})$, (ke^n) ont pour limite $+\infty$.

définition : Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ (A étant un réel) contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang n_0. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Cela revient à dire que pour tout nombre réel A, on peut trouver un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \leqslant n_0$, on ait $u_n < A$!
Un nombre A peut être aussi petit qu'on l'imagine, les termes u_n parviennent à lui être tous inférieurs à partir d'un certain rang !

► **suites de référence de limite –∞** (résultats admis)
Soit k un nombre réel (k>0)
Les suites $(-kn)$, $(-kn^2)$, $(-kn^3)$, $(-k\sqrt{n})$, $(-ke^n)$ ont pour limite $-\infty$.

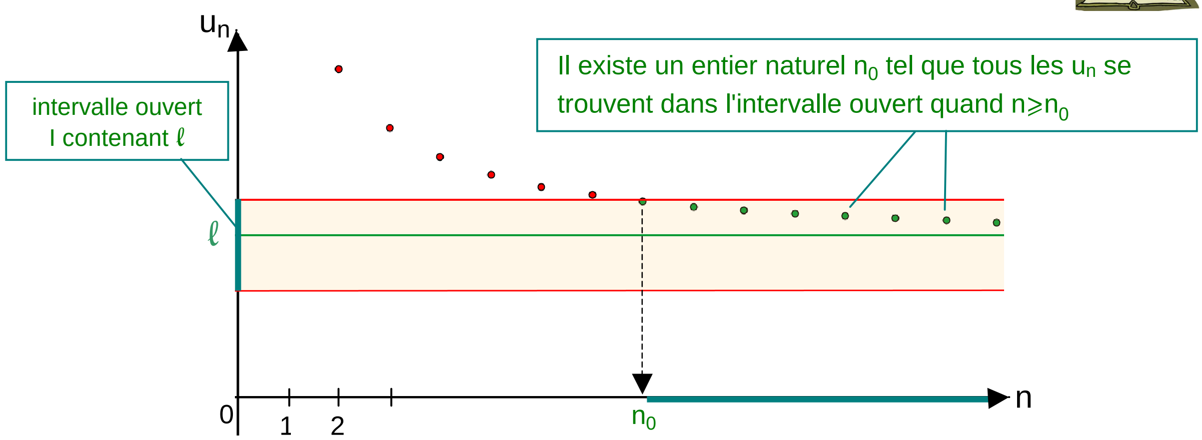
Ex : (u_n) est la suite définie par $\mathbf{u_n = 3\sqrt{n}}$. Démontrons que (u_n) a pour limite $+\infty$:
Soit un intervalle $]A; +\infty[$ avec $A \geqslant 0$ (on considère A positif puisque $3\sqrt{n} \geqslant 0$).
$u_n \in]A; +\infty[$ si et seulement si $3\sqrt{n} > A$, c'est à dire $\sqrt{n} > \frac{A}{3}$ soit $n > \frac{A^2}{9}$

Si on prend n_0, un entier naturel strictement supérieur à $\frac{A^2}{9}$, alors tout intervalle ouvert $]A; +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir du rang n_0.
Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

b) limite finie :

définition : Une suite (u_n) a pour limite un nombre réel ℓ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert I contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang n_0. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

On dit alors que (u_n) converge vers ℓ. (u_n) est une suite convergente !



On peut dire que les termes u_n s'accumulent autour de ℓ !

▶ **suites de référence de limite 0** (résultats admis)

Soit k un nombre réel, les suites $\left(\frac{k}{n}\right)$, $\left(\frac{k}{n^2}\right)$, $\left(\frac{k}{n^3}\right)$, $\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)$, (ke^{-n}) ont pour limite 0.

Ex : (u_n) est la suite définie par $\mathbf{u_n = \frac{3}{n^2}}$. Démontrons que (u_n) converge vers 0 :

on est certain que tous les intervalles ouverts contenant 0 s'écrivent]–a ; b[!

Soit un intervalle]–a ; b[avec a et b deux nombres réels tels que a>0 et b>0

$u_n \in\ ]-a\,;\,b[$ si et seulement si $-a < \frac{3}{n^2} < b$, c'est à dire $0 < \frac{3}{n^2} < b$ $\left(\frac{3}{n^2} > 0\right)$,

la fonction inverse est strictement décroissante !

ce qui revient à $\frac{n^2}{3} > \frac{1}{b}$ soit $n^2 > \frac{3}{b}$ donc $n > \sqrt{\frac{3}{b}}$

Si on prend n_0, un entier naturel strictement supérieur à $\sqrt{\frac{3}{b}}$, alors tout intervalle ouvert]–a ; b[contient tous les termes u_n à partir du rang n_0.

Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

propriété : unicité de la limite

Si une suite (u_n) a pour limite un nombre réel ℓ quand n tend vers $+\infty$, alors cette limite est unique.

► ***démonstration*** (raisonnement par l'absurde)
Supposons qu'une suite (u_n) admette deux limites ℓ et ℓ' avec $\ell<\ell'$
D'après les définitions précédentes, cela voudrait dire que l'intervalle ouvert
$\left]\ell-1\,;\,\frac{\ell+\ell'}{2}\right[$ contient tous les termes u_n à partir d'un rang n_0 et que l'intervalle ouvert
$\left]\frac{\ell+\ell'}{2}\,;\,\ell'+1\right[$ contient tous les termes u_n à partir d'un rang n_1.
Si on prend n plus grand que n_0 et n_1, cela voudrait dire que u_n est dans les deux intervalles. C'est impossible, car les deux intervalles sont disjoints et leur intersection est donc vide. Donc ℓ est forcément égal à ℓ'.
Par suite, une suite (u_n) ne peut pas admettre deux limites distinctes.

Très utile dans ce cas : déterminons la limite ℓ de la suite convergente (u_n) définie par récurrence $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=-\dfrac{1}{u_n+2} \end{cases}$ On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$ donc ℓ vérifie $\ell=-\dfrac{1}{\ell+2}$ donc $\ell^2+2\ell+1=0$ donc $\ell=-1$!

remarques :

► Les définitions précédentes conduisent à l'assertion suivante :
Si une suite (u_n) a une limite finie ou infinie alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$

► Certaines suites n'ont pas de limite.
Par exemple la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=(-1)^n$. Elle prend alternativement les valeurs 1 si n est impair et –1 si n est impair.
Elle ne peut donc avoir pour limite $+\infty$ ou $-\infty$.
D'autre part, si ℓ est un réel, un intervalle tel que $]\,\ell-0{,}3;\ \ell+0{,}2[$ d'amplitude 0,5 ne peut contenir en même temps –1 et 1. Il n'existe donc pas de rang à partir duquel tous les u_n soient dans cet intervalle. Par suite, il n'existe pas de limite finie ℓ pour la suite (u_n).

► une suite est divergente quand elle n'a pas de limite ou quand elle a une limite infinie.

II) Limites et comparaison :

a) Théorème de comparaison :

(u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
1► si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$
2► si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

► ***démonstration*** - *exigible* ROC -
1►Soit A un nombre réel quelconque. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ donc (voir définition) l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang n_0. On sait également que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang n_1. Appelons M le plus grand des entiers n_1 et n_0. A partir du rang M, $]A;+\infty[$ contient donc tous les u_n et à plus forte raison tous les v_n.
A étant quelconque, à partir du rang M, tout terme v_n est contenu dans tout intervalle ouvert $]A;+\infty[$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$

2▶ Soit A un nombre réel quelconque. On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ donc (voir définition) l'intervalle $]-\infty\,;A[$ contient tous les termes v_n à partir d'un certain rang n_0. On sait également que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang n_1. Appelons M le plus grand des entiers n_1 et n_0. A partir du rang M, $]-\infty\,;A[$ contient donc tous les v_n et à plus forte raison tous les u_n.
A étant quelconque, à partir du rang M, tout terme u_n est contenu dans tout intervalle ouvert $]-\infty\,;A[$. Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

b) Suites monotones convergentes:

propriétés :

1▶ Si une suite u_n est croissante et converge vers un nombre réel ℓ alors, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant \ell$

2▶ Si une suite u_n est décroissante et converge vers un nombre réel ℓ alors, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant \ell$

on tient un raisonnement par l'absurde !

▶ ***démonstration*** - *exigible* ROC -

1▶ Supposons qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} > \ell$. Comme la suite est croissante, cela voudrait dire qu'à partir du rang n_0 tous les termes u_n sont en dehors de l'intervalle $]-\infty\,; u_{n_0}[$ C'est impossible puisque ℓ appartient à $]-\infty\,; u_{n_0}[$ et que cet intervalle ouvert doit contenir tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. Donc, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant \ell$.

2▶ Supposons qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} < \ell$. Comme la suite est décroissante, cela voudrait dire qu'à partir du rang n_0 tous les termes u_n sont en dehors de l'intervalle $]u_{n_0}\,;+\infty[$ C'est impossible puisque ℓ appartient à $]u_{n_0}\,;+\infty[$ et que cet intervalle ouvert doit contenir tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. Donc, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant \ell$.

propriété (admise) :

(u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes respectivement vers ℓ et ℓ'.
Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang n alors $\ell \leqslant \ell'$.

c) Théorème des gendarmes (théorème d'encadrement): (admis)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.
Si $(v_n) \leqslant (u_n) \leqslant (w_n)$ à partir d'un certain rang et si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Ex : Déterminons la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$

donc, $-1 \times \dfrac{1}{n} \leqslant \cos n \times \dfrac{1}{n} \leqslant 1 \times \dfrac{1}{n}$ $\quad\left(\dfrac{1}{n} > 0\right)$

donc, $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\cos n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ par suite, $-\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc les limites sont égales

et d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

II) Limites de suites et opérations :

(u_n) et (v_n) sont deux suites , ℓ et ℓ' sont deux nombres réels

propriété 1 *(admise)*: limite d'une somme

si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$.....	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$.....	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) =$.....	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

On ne peut pas conclure directement, la forme est indéterminée. Dans ce cas, il faudra parvenir à lever l'indétermination !

propriété 2 *(admise)*: limite d'un produit

si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$.....	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$.....	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n v_n) =$.....	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**	**?**

on utilise la règle des signes pour trouver le signe de la limite d'un quotient ou d'un produit !

propriété 3 *(admise)*: limite d'un quotient

(v_n) est telle que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 0$

▶ quand $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n \neq 0$

si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$.....	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$.....	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$.....	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**

▶ quand $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$.....	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$.....	0 en étant positif	0 en étant positif	0 en étant négatif	0 en étant négatif	0
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$.....	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**

Ex : déterminer les limites des suites (u_n) suivantes définies sur $\mathbb{N}$ par :

▶ $u_n = n^2 + 3\sqrt{n} + 5$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ (suites de référence)

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + 3\sqrt{n} + 5 = +\infty$

▶ $u_n = -\dfrac{2}{n^2+1}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{2}{n^2+1} = 0$

▶ $u_n = 2n^3 - 5n^2 + 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 2n^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -5n^2 = -\infty$ *forme indéterminée, on ne peut pas conclure !*

$u_n = 2n^3 - 5n^2 + 1 = n^3\left(2 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{n^3}\right)$

on lève l'indétermination en mettant en facteur le terme la puissance de n tendant le plus rapidement vers l'infini !

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{n^3} = 2$ donc $\lim 2n^3 - 5n^2 + 1 = +\infty$

▶ $u_n = \dfrac{-n^2 + 5}{n + 3}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} -n^2 + 5 = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n + 3 = +\infty$ *forme indéterminée, on ne peut pas conclure !*

on lève l'indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par la puissance de n tendant le plus rapidement vers l'infini !

$u_n = \dfrac{-n^2 + 5}{n + 3} = \dfrac{n^2\left(-1 + \dfrac{5}{n^2}\right)}{n\left(1 + \dfrac{3}{n}\right)} = n \times \dfrac{-1 + \dfrac{5}{n^2}}{1 + \dfrac{3}{n}}$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1 + \dfrac{5}{n^2}}{1 + \dfrac{3}{n}} = -1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-n^2 + 5}{n + 3} = -\infty$

III) Limites de suites monotones - suites majorées, minorées, bornées :

définitions : Soient une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ et m et M deux nombres réels

▶ on dit que la suite (u_n) est majorée par M quand, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$

M est appelé un majorant de la suite (u_n).

▶ on dit que la suite (u_n) est minorée par m quand, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$

m est appelé un minorant de la suite (u_n).

▶ on dit que la suite (u_n) est bornée quand elle est à la fois minorée et majorée.

Ex :

▶ Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3 + \dfrac{5}{n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{5}{n} \leqslant 5$ donc $3 + \dfrac{5}{n} \leqslant 3 + 5$ donc $u_n \leqslant 8$. La suite est majorée par 8.

Pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{5}{n} \geqslant 0$ donc $3 + \dfrac{5}{n} \geqslant 3$ donc $u_n \geqslant 3$. La suite est minorée par 3.

Par suite, la suite (u_n) est bornée (elle est à la fois majorée et minorée).

▶ Les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$, $v_n = \cos(n)$, $w_n = \sin(n)$ sont toutes minorées par –1 et majorées par 1. Elles sont donc bornées.

Théorèmes de convergence (admis) :

▶ Si une suite est croissante et majorée, alors cette suite est convergente (elle a une limite finie)
▶ Si une suite est décroissante et minorée, alors cette suite est convergente

attention, ces théorèmes permettent de déduire la convergence mais ne permettent pas de connaître la limite !

propriétés :

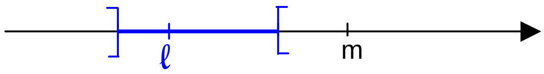
1▶ Si une suite (u_n) converge vers un nombre réel ℓ et que (u_n) est majorée par un nombre réel M alors $\ell \leqslant M$

2▶ Si une suite (u_n) converge vers un nombre réel ℓ et que (u_n) est minorée par un nombre réel m alors $\ell \geqslant m$

▶ ***démonstration*** - *exigible* ROC - (raisonnement par l'absurde)

1▶ Supposons que $\ell > M$. Considérons un intervalle I contenant ℓ et inclus dans l'intervalle ouvert $]M ; +\infty[$. (u_n) a pour limite finie ℓ donc il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I. C'est impossible puisque M est un majorant de (u_n). Par suite, $\ell \leqslant M$.

2▶ Supposons que $\ell < m$. Considérons un intervalle I contenant ℓ et inclus dans l'intervalle ouvert $]-\infty ; m[$. (u_n) a pour limite finie ℓ donc il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I. C'est impossible puisque m est un minorant de (u_n). Par suite, $\ell \geqslant m$.



propriétés :

1▶ Si une suite (u_n) est croissante et **non** majorée alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

2▶ Si une suite (u_n) est décroissante et **non** minorée alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

▶ ***démonstration*** - *exigible* ROC -

1▶ Soit une suite (u_n) croissante et non majorée. Si elle n'est pas majorée, cela veut dire que, quel que soit le nombre A, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} > A$.
Comme la suite est croissante, tous les termes de rang supérieur à n_0 sont strictement supérieurs à A.
Il en résulte que, quel que soit le nombre A, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle ouvert $]A ; +\infty[$.
(u_n) a donc pour limite $+\infty$ (voir définition de la limite infinie pour une suite).

2► Soit une suite (u_n) décroissante et non minorée. Si elle n'est pas minorée, cela veut dire que, quel que soit le nombre A, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0}<A$.
Comme la suite est décroissante, tous les termes de rang supérieur à n_0 sont donc strictement inférieurs à A.
Il en résulte que, quel que soit le nombre A, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite un sont dans l'intervalle ouvert $]-\infty ; A[$.
(u_n) a donc pour limite $-\infty$ (voir définition de la limite infinie pour une suite).