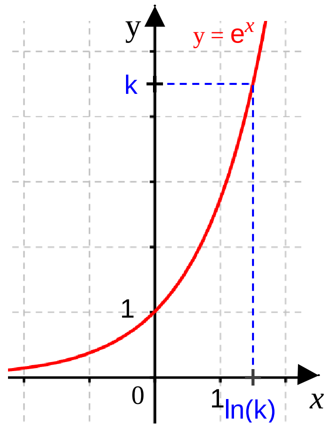
La fonction logarithme népérien

I) Fonction logarithme népérien :

a) le logarithme népérien :



k est un nombre réel strictement positif donné.
Nous avons établi dans un chapitre précédent que la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas d'une fonction strictement monotone (ici strictement croissante), il existe un unique nombre réel x tel que $e^x = k$.
Ce nombre réel s'appelle le logarithme népérien de k.
On le note ln(k)

définition : le logarithme népérien d'un réel strictement positif k est l'unique solution de l'équation $e^x = k$.

b) fonction logarithme népérien :

définition : La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction qui, à tout nombre réel strictement positif x, associe le nombre réel $\ln(x)$

si aucune confusion n'est possible, $\ln(x)$ s' écrit simplement $\ln x$

s'écrit aussi : $\ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y$

c) conséquences :

- ▶ Pour tout nombre réel $x>0$, pour tout nombre réel y, $\ln(x) = y$ <u>équivaut à</u> $x = e^y$

- ▶ Pour tout nombre réel $x>0$, $e^{\ln(x)} = x$
- ▶ Pour tout nombre réel x, $\ln(e^x) = x$

les fonctions ln et exp sont réciproques l'une de l'autre !

▶ $\ln(1) = 0$ $(e^0 = 1)$ ▶ $\ln(e) = 1$ $(e^1 = e)$ ▶ $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$ $\left(\frac{1}{e} = e^{-1}\right)$

II) Propriétés algébriques :

un des principaux intérêts de la fonction ln est de transformer les produits en sommes !

propriété : relation fonctionnelle fondamentale

Pour tous nombres réels $a>0$ et $b>0$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

▶ ***démonstration***
Soient deux nombres réels a et b tels que a>0 et b>0
$e^{\ln(a \times b)} = a \times b = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = e^{\ln(a) + \ln(b)}$,
donc $e^{\ln(a \times b)} = e^{\ln(a) + \ln(b)}$,
donc $\ln(axb) = \ln(a)+\ln(b)$

Pour tous réels a et b, a = b si et seulement si $e^a = e^b$
(vu dans le chapitre "fonction exponentielle")

propriétés :

Pour tous nombres réels $a>0$ et $b>0$, pour tout entier relatif m

1▶ $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ **2▶** $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

3▶ $\ln\left(a^m\right) = m\ln(a)$ **4▶** $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln(a)$

► ***démonstrations***

Soient deux nombres réels a et b tels que a>0 et b>0

1▶ $\ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln(1) = 0$,

donc $\ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = 0$,

par suite $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$

2▶ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

3▶

- cas où m est un entier naturel

Soit (P_m) la proposition $\ln\left(a^m\right) = m\ln(a)$.

Démontrons par récurrence que (P_m) est vraie pour tout entier naturel m

initialisation : pour m=0 on a $\ln\left(a^0\right) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(a)$ donc (P_0) est vraie

hérédité : Supposons que (P_m) est vraie pour un entier naturel m quelconque.

Démontrons que (P_{m+1}) est vraie.

$\ln\left(a^{m+1}\right) = \ln\left(a^m \times a\right) = \ln\left(a^m\right) + \ln(a)$,

or $\ln\left(a^m\right) = m\ln(a)$ étant donné que (P_m) est vraie,

donc $\ln\left(a^{m+1}\right) = m\ln(a) + \ln(a) = (m+1)\ln(a)$

Par suite, (P_{m+1}) est vraie.

conclusion : La propriété (P_m) est vraie pour tout entier naturel m et tout réel a strictement positif.

- cas où m est un entier relatif strictement négatif

$\ln\left(a^m\right) = \ln\left(\frac{1}{a^{-m}}\right) = -\ln\left(a^{-m}\right)$,

or $-\ln\left(a^{-m}\right) = -(-m)\ln(a)$ (voir paragraphe précédent, $-m$ est ici un entier naturel),

donc $\ln\left(a^m\right) = m\ln(a)$

4▶ $\ln(a) = \ln\left(\sqrt{a} \times \sqrt{a}\right) = \ln\left(\sqrt{a}\right) + \ln\left(\sqrt{a}\right) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right)$ donc $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Ex :

▶ $\ln\left(9^{-4}\right) + 5\ln(3) = -4\ln\left(3^2\right) + 5\ln(3) = -8\ln(3) + 5\ln(3) = -3\ln(3)$

▶ $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{2}\right) + \ln\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(7) - \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\ln(7)$

III) Étude de la fonction ln :

a) continuité et dérivabilité :

propriété (admise) : La fonction ln est continue sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

propriété :

La fonction ln est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, on a :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

► ***démonstration***

Soient deux nombres réels x et a tels que $x>0$ et $a>0$.

On veut montrer que $\lim\limits_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a}$

Posons $X = \ln(x)$ et $A = \ln(a)$.

On a $\lim\limits_{x \to a} \ln x = \ln(a)$ donc $\lim\limits_{X \to A} X = A$ (ln est continue).

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \lim_{X \to A} \frac{X - A}{e^X - e^A} = \lim_{X \to A} \frac{1}{\frac{e^X - e^A}{X-A}},$$

or la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$,

donc $\lim\limits_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{\exp'(A)} = \frac{1}{e^A} = \frac{1}{e^{\ln(a)}} = \frac{1}{a}$,

donc la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

b) limites aux bornes :

propriétés : 1► $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ 2► $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

► ***démonstrations***

1► On veut montrer que pour tout réel A, il existe un nombre réel m tel que si $x > m$ alors $\ln(x) > A$.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

donc pour tout nombre réel A, $\ln(x) > A$ revient à dire que $e^{\ln(x)} > e^A$ soit $x > e^A$

Il suffit donc de poser $m=e^A$ et on a, pour tout $x>m$, $\ln(x) > A$

Par suite, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

2► Soit $x>0$, posons $X = \frac{1}{x}$, on a alors $\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\ln(X)$,

or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$ (voir 1►) donc $\lim\limits_{X \to +\infty} -\ln(X) = -\infty$

donc,

d'après la propriété sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

c) sens de variation de la fonction ln :

propriété : La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

▶ ***démonstration***

Si $x \in\ ]0\,;+\infty[$ alors $\dfrac{1}{x} > 0$ donc $\ln'(x)>0$.

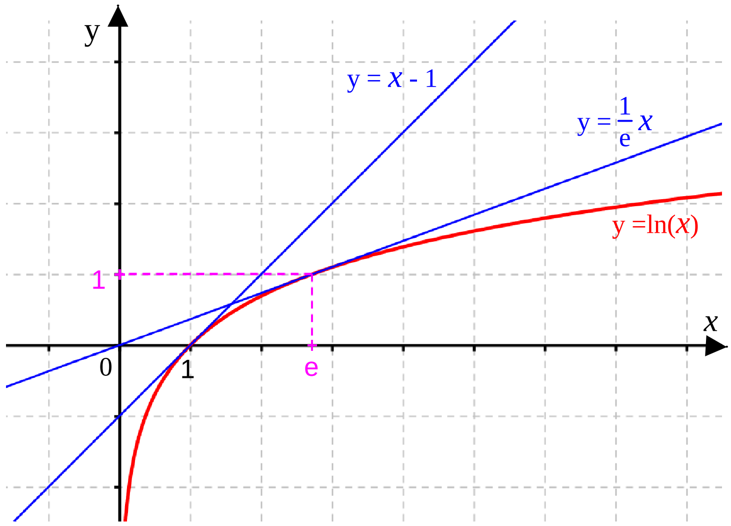
Par suite, la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

conséquence : La fonction ln étant continue et strictement croissante, on a :
Soient a et b deux réels strictement positifs,
▶ ln(a) = ln(b) équivaut à a = b ▶ ln(a) < ln(b) équivaut à a < b

utile pour certaines équations ou inéquations !

d) tableau de variation et représentation graphique :

x	0		1		e		$+\infty$
ln' (x)	||			+			
ln(x)	|| $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$



Pour tracer la courbe, on peut s'aider de tangentes particulières :

▶ au point d'abscisse 1 : ln(1) = 0 et $\ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

équation de la tangente :

$y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1) = x - 1$

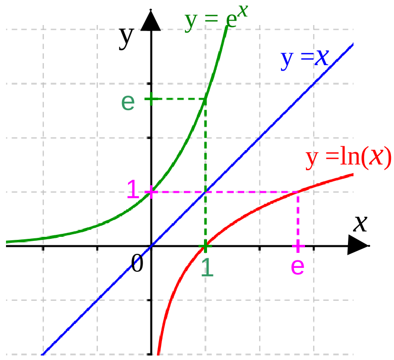
▶ au point d'abscisse e : ln(e) = 1 et $\ln'(e) = \dfrac{1}{e}$

équation de la tangente :

$y = \ln'(e)(x-e) + \ln(e) = \dfrac{1}{e}x - e + e = \dfrac{1}{e}x$

Les courbes correspondant à deux fonctions réciproques l'une de l'autre sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$!!

remarque :
Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$



<u>III) Compléments :</u>

a) <u>limites importantes à connaître :</u>

<u>propriété</u> : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

«x l'emporte sur $\ln(x)$ au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$!»

► ***démonstration***

Posons $X = \ln(x)$, on a alors $e^X = x$ et $\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{X}{e^X}$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$ (voir sens de variation de la fonction ln),

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{X}{e^X} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\left(\dfrac{e^X}{X}\right)} = 0$ (voir chapitre sur la fonction exponentielle)

donc, d'après la propriété de la limite d'une fonction composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

<u>propriété</u> : $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$

► ***démonstration***

Posons $X = \ln(x)$, on a alors $e^X = x$ et $x\ln(x) = Xe^X$

Or, $\lim\limits_{x \to 0} X = -\infty$ (voir sens de variation de la fonction ln),

donc $\lim\limits_{x \to 0} Xe^X = 0$ (voir chapitre sur la fonction exponentielle)

donc, d'après la propriété de la limite d'une fonction composée, $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$

<u>propriété</u> : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

► ***démonstration***

la dérivée de ln en 1 est la limite du taux d'accroissement de ln entre 1 et $1+ x$ quand x tend vers 0 !

La fonction ln est dérivable en 1 et on a $\ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

Par définition $\ln'(1) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x) - \ln(1)}{x}$

donc $\ln'(1) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x) - \ln(1)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x) - 0}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

b) dérivées des fonctions du type $x \longmapsto \ln[u(x)]$:

propriété : Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction ln(u) est dérivable sur I et $\ln'[u(x)] = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

► ***démonstration***

Dans le chapitre sur la dérivabilité, nous avons admis la propriété suivante:
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur I' intervalle u(I), alors la fonction w telle que w(x) = v(u(x)) est dérivable sur I .
On a alors w'(x) = u'(x) x v'(u(x))
Posons $v(x) = \ln(x)$, $w(x) = \ln[u(x)]$.
Il découle de la propriété précédente ci-dessus que :

Pour tout réel x de I, on a $\ln'[u(x)] = u'(x) \times \dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Ex : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + 3\right)$
$f = \ln(u)$ avec $u(x) = x^2 + 3$. Or, u est définie, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Donc, pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = \ln'\left(x^2 + 3\right) = \dfrac{2x}{x^2 + 3}$

IV) La fonction logarithme décimal :

définition : La fonction logarithme décimal notée log est définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

propriétés (admises) :
► La fonction logarithme décimal admet les mêmes propriétés algébriques que la fonction ln

Ex :
log(1)=0 log(10)=1 log(0,1)= –1 log(100) = 2 log(0,01) = –2
Pour tout entier relatif n, on a $\log\left(10^n\right) = n\log(10) = n$

► La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto 10^x$ et la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $x \longmapsto \log(x)$ sont réciproques l'une de l'autre.