lois de probabilité à densité

I) Approche de la loi de probabilité à densité :

a) notion de variables aléatoires discrètes et continues:

Rappel :

définition : E (univers) est l'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire X définie sur E est une fonction qui, à chaque issue de E associe un nombre réel x.

une variable aléatoire est souvent notée X,Y,Z...
«X prend la valeur x » s'écrit (X = x)

Exemple 1 : Soit l'expérience consistant à lancer une pièce **truquée** et à observer la face apparente. Elle est aléatoire et son univers est E. E = {pile, face}.
La loi de probabilité de l'expérience est définie par le tableau :

issues	pile	face
probabilité	0,7	0,3

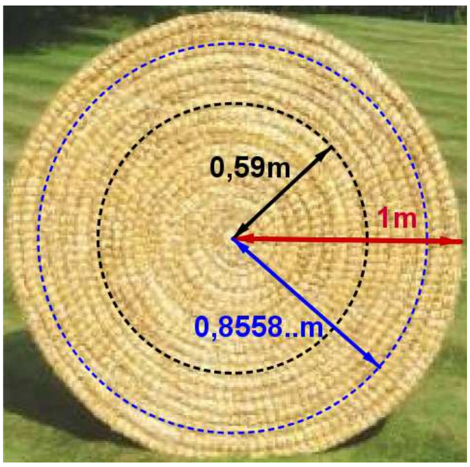
On peut définir une variable aléatoire X qui, à chaque lancer, associe un nombre correspondant à un gain algébrique.
Si la face visible est Pile, on gagne 10 € (gain algébrique : + 10)
Si la face visible est Face, on perd 1€ (gain algébrique : – 1)
Dans notre exemple, la variable aléatoire X associe "Pile" à 10 et "Face" à –1.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est définie par le tableau :

x_i	10	–1
$P(X=x_i)$	0,7	0,3

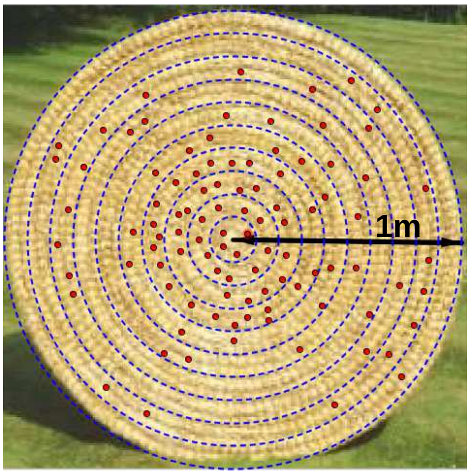
Dans ce cas, la variable aléatoire prend un **nombre fini (2)** de valeurs ("10" ou "–1").
La variable aléatoire est dite **"discrète".**
On peut définir la loi de probabilité associée à la variable aléatoire par un tableau**.**

Dans ce cas, la variable aléatoire prend un **nombre infini** de valeurs (le nombre de réels compris entre 0 et 1 est infini). La variable aléatoire est dite **"continue".**
On ne peut pas définir la loi de probabilité associée à la variable aléatoire **par un tableau**.

Exemple 2 : On tire à l'arc sur une cible de rayon 1m. On suppose que toutes les flèches touchent la cible.
On définit la variable aléatoire associant à chaque point d' impact sa distance (en m) au centre de la cible.
La variable aléatoire peut prendre une infinité de valeurs dans l'intervalle [0 ; 1].



b) notion de densité de probabilité :



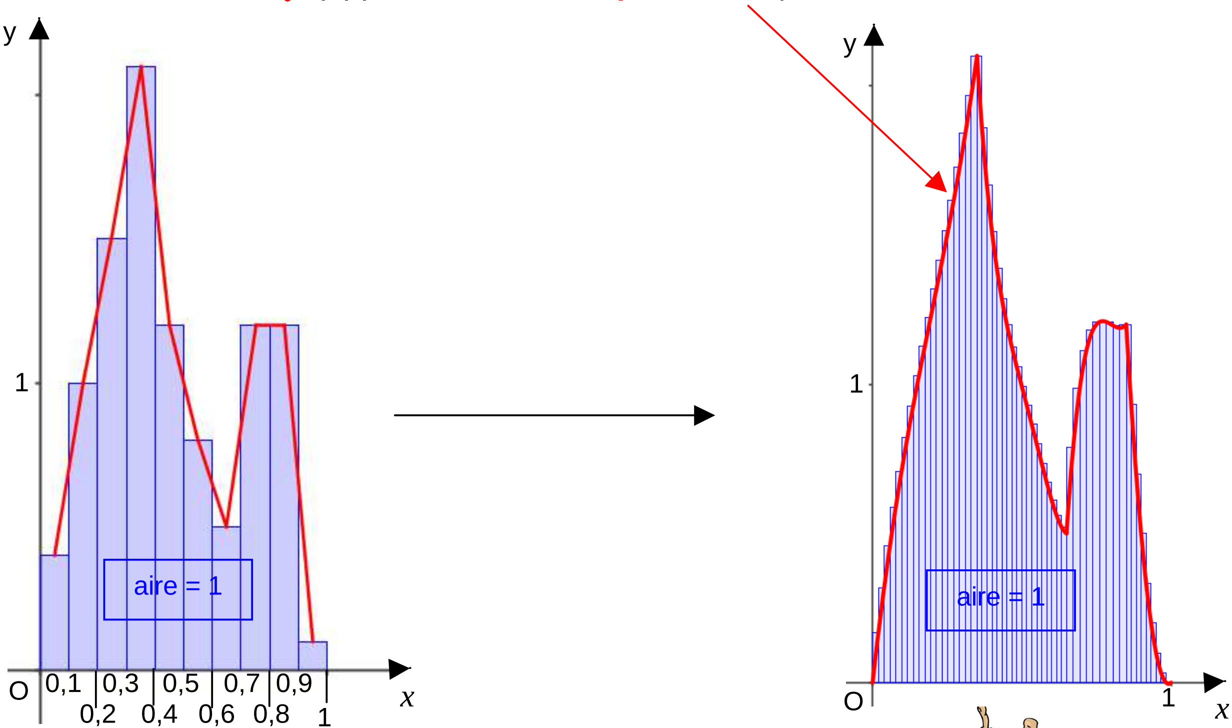
Reprenons l'exemple 2. Un tireur à l'arc a effectué 100 tirs. Nous allons supposer qu'il tire pratiquement de la même manière pour chaque série de 100 tirs.
Comme nous venons de le voir, une loi de probabilité ne peut pas être définie par un tableau.
Remarquons que la **densité** *(rapport entre le nombre de points d'impact et le nombre total de points)* des points d'impact est plus grande dans certaines zones. Pour une distance au centre de la cible comprise entre 30 et 40 cm, on trouve 21 impacts. Pour une distance comprise entre 0 et 10cm, on en trouve 4.

Nous allons donc, dans le cas d'une variable aléatoire continue, nous intéresser à la probabilité que les valeurs prises par la variable aléatoire appartiennent à tel ou tel intervalle correspondant à la distance par rapport au centre de la cible.
Un tireur à l'arc a effectué 100 tirs. Rappelons qu'il tire pratiquement de la même manière pour chaque série de 100 tirs.
On pourrait définir une loi de probabilité par ce tableau :

I	[0;0,1[	[0,1;0,2[	[0,2;0,3[	[0,3;0,4[	[0,4;0,5[	[0,5;0,6[	[0,6;0,7[	[0,7;0,8[	[0,8;0,9[	[0,9;1[
$P(X\in I)$	$\frac{4}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{21}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{8}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{1}{100}$

On pourra écrire, par exemple, que $P(0,2 \leqslant X < 0,3) = 0,15$

Cette loi de probabilité, ainsi définie, n'est pas satisfaisante. Dans notre tableau, nous avons fabriqué 10 intervalles d'une amplitude fixée. Il faudrait en définir une valable pour n'importe quel intervalle, aussi petit soit-il !
Imaginons que nous multiplions le nombre d'intervalles.
Cela nous permet de représenter alors la loi de probabilité sous forme d'intégrales grâce à une fonction f (appelée **densité de probabilité**).



en utilisant des classes de valeurs suffisamment étroites, une densité de probabilité peut être vue comme la «limite» d'un histogramme !

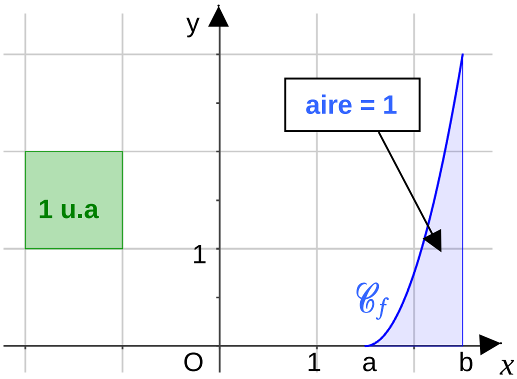
II) Densité de probabilité :

définition : Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est appelée densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ si :

- ► f est continue et positive sur $\mathbb{R}$
- ► l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ est égale à une unité d'aire

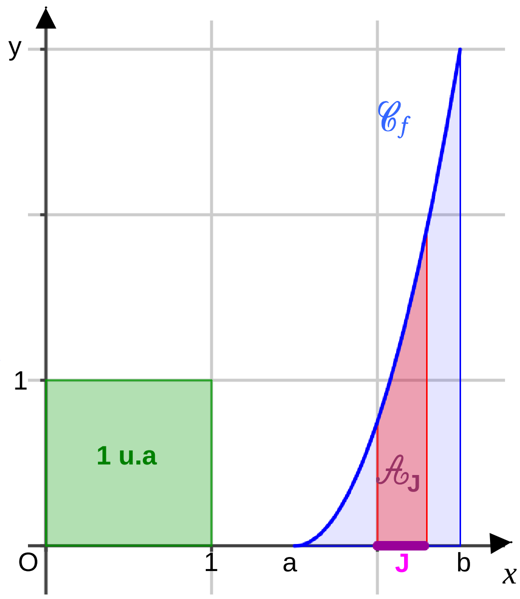
La probabilité $P(X\in\mathbb{R}) = 1$!

une densité de probabilité peut être définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (borné ou non borné). Dans cet exemple, I = [a;b]



définition : Soit f, une densité de probabilité sur un intervalle I.
Soit E l'univers d'une expérience aléatoire. Soit X une variable aléatoire définie sur E.
X suit la loi de probabilité de densité f quand :
Pour tout intervalle J de I, $P(X\in J) = \mathcal{A}_J$

$\mathcal{A}_J$ est l'aire de la partie du plan située sous la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle J



Ex : Soit X une variable aléatoire suivant la loi de probabilité de densité f définie sur $\left[-\frac{1}{2},1\right]$ par

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leqslant x < 0 \\ f(x) = 1 & \text{si } 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ f(x) = -2x + 2 & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

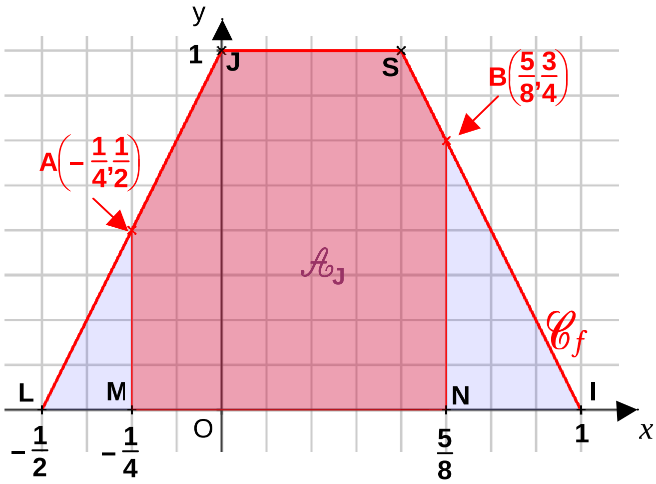
Soit l'intervalle J = $\left[-\frac{1}{4};\frac{5}{8}\right]$.

Calculons la probabilité $P(X\in J)$:

ou $P(-0{,}25 \leqslant X \leqslant 0{,}625)$!

Soient les points A $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$, B $\left(\frac{5}{8},\frac{3}{4}\right)$, M $\left(-\frac{1}{4},0\right)$,

N $\left(\frac{5}{8},0\right)$, L $\left(-\frac{1}{2},0\right)$



La probabilité cherchée est égale à l'aire $\mathcal{A}_J$ de la partie du plan colorée ici en violet.

Pour calculer l'aire $\mathcal{A}_J$, on soustrait la somme des aires des deux triangles (bleus) ALM et BNI à l'aire du trapèze JSIL.

$\mathcal{A}_J$ = Aire (JSIL) – aire(ALM) – aire (BNI)

$= 1 - \frac{1}{16} - 0{,}375 = \frac{51}{64} \simeq 0{,}79$

Il en résulte que

$P\left(-\frac{1}{4} \leqslant X \leqslant \frac{5}{8}\right) = P(-0{,}25 \leqslant X \leqslant 0{,}625) \simeq 0{,}79$

propriété : Soit E l'univers d'une expérience aléatoire. Soit X une variable aléatoire continue définie sur E dont la densité de probabilité est f. On suppose que f est continue sur l'intervalle [a,b] (a et b sont des réels tels que a < b).

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ex : Reprenons l'exemple précédent
détermination de P(X∈J) à l'aide d'intégrales :

f est une fonction positive et continue sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2},1\right]$ donc on a :

$$\mathcal{A}_J = \int_{-\frac{1}{4}}^{5/8} f(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{4}}^{0} (2x+1)dx + \int_0^{1/2} 1\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{5/8} (-2x+2)\,dx$$

$$= \left[x^2+x\right]_{-1/4}^{0} + \left[x\right]_0^{1/2} + 2\left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_{1/2}^{5/8} = \frac{3}{16} + \frac{1}{2} + \frac{7}{64} = \frac{51}{64} \simeq 0{,}79$$

propriété : Soit k un nombre réel. Soit E l'univers d'une expérience aléatoire. Soit X une variable aléatoire continue définie sur E dont la densité de probabilité est f.
On a : P(X = k) = 0

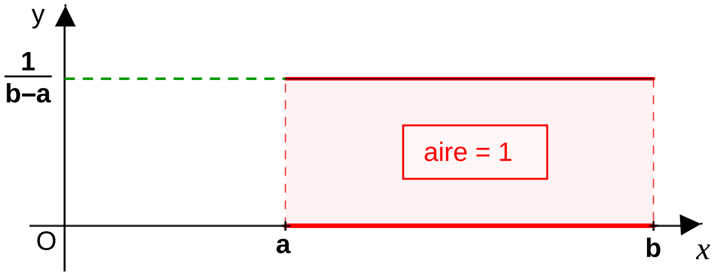
► ***démonstration***

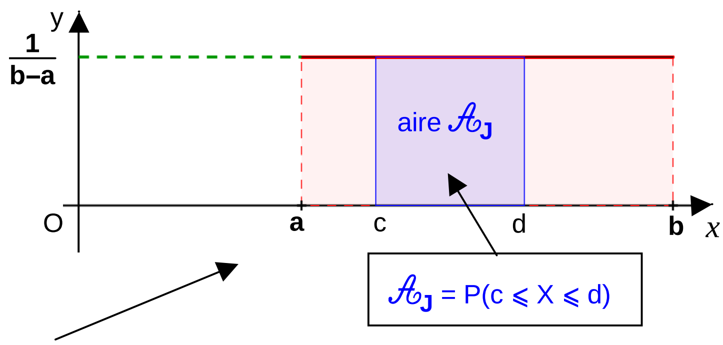
P(X = k) = P(X ∈ [k,k]). Il s'agit, par définition, de l'aire sous la courbe f sur l'intervalle [k, k]. Il en résulte que P(X = k) = 0

Pour désigner un intervalle, on peut donc utiliser des inégalités au sens large ou au sens strict !
P(a⩽**X<b)** = P(a**<X⩽b)** = P(a⩽**X⩽b)** = P(a**<X<b)**

III) Loi uniforme :

définition : Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur un intervalle I = [a;b] (avec a et b deux nombres réels tels que a<b) quand sa densité de probabilité f est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$





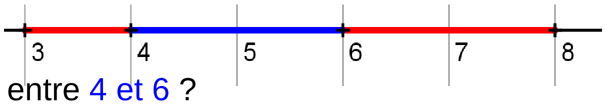
Pour tout intervalle J = [c,d] avec a<c<d<b, on a donc :

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_c^d 1\,dx = \frac{d-c}{b-a}$$

► P(c ⩽ X ⩽ d) est le quotient des longueurs des deux intervalles J et I ! $P(c \leqslant X \leqslant d) = \dfrac{\text{longueur de J}}{\text{longueur de I}}$

► La notion d'**uniformité** vient du fait que la probabilité qu'une variable aléatoire suivant une loi uniforme soit dans un certain intervalle ne dépend pas de la position de l'intervalle, mais uniquement de sa longueur !

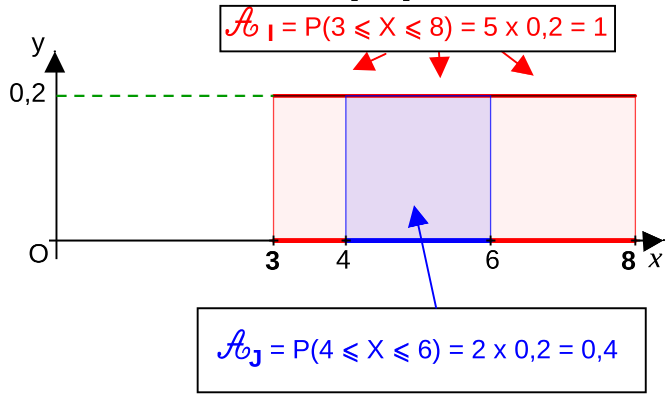
Ex : On choisit au hasard un nombre entre 3 et 8.
Quelle est la probabilité que ce nombre soit compris entre 4 et 6 ?



La variable aléatoire X indiquant le nombre choisi suit la loi uniforme sur [3;8].

On a donc $P(4 \leqslant X \leqslant 6) = \dfrac{6-4}{8-3} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$

on peut mettre des inégalités au sens strict ou au sens large, comme nous l'avons vu précédemment cela ne modifie pas le résultat !



définition : L'espérance d'une variable aléatoire X de densité de probabilité f définie sur un intervalle fermé [a;b] (avec a < b) est définie par :

$$E(X) = \int_a^b x f(x)\,dx$$

En assimilant l'intégrale à une somme, $\int_a^b x \times f(x)\,dx$ correspond à la somme des produits de la valeur de la variable aléatoire par sa probabilité. C'est un prolongement de la définition établie en classe de Première !

__propriété :__ Soit une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur un intervalle fermé [a;b]

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

► ***démonstration***

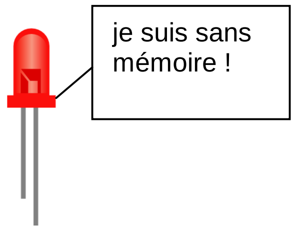
$$E(X) = \int_a^b x f(x)\,dx = \int_a^b x \times \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2} \times \frac{1}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

Ex : Reprenons l'exemple précédent.
On choisit au hasard un nombre entre 3 et 8.
La variable aléatoire X indiquant le nombre choisi suit la loi uniforme sur [3;8].

L'espérance de la variable aléatoire X est $E(X) = \frac{3+8}{2} = 5{,}5$

IV) Loi exponentielle :

a) notion de durée de vie sans vieillissement :



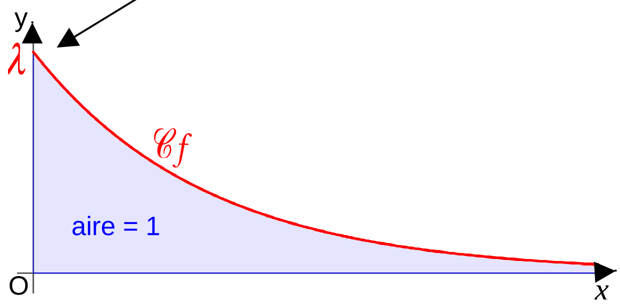
Certains composants électroniques ont des durées de vie théoriquement très élevées. Une LED a une durée de vie pouvant dépasser les 50 000 heures. Si vous l'utilisiez une heure par jour, son espérance de vie serait de près de 136 ans !
Si le composant n'est pas tombé en panne les 15 premiers jours, on peut donc considérer que la probabilité qu'il tombe en panne le 16ème jour est la même que celle de la veille !
On dit que la **durée de vie** de ce composant électronique est **sans vieillissement (**ou **sans mémoire)**.
Soient t et h deux réels positifs.
La probabilité que la LED fonctionne encore h jours supplémentaires sachant qu'elle a déjà fonctionné t jours ne dépend pas de t !
Appelons X la variable aléatoire donnant la durée de vie en jours de ce composant.
Pour tout réel positif h, «X > h» correspond à l'événement «la durée de vie dépasse h jours».

On peut alors exprimer ce qui précède à l'aide d'une probabilité conditionnelle :
$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h)$ ne dépend pas de t ou $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)$

cette lettre grecque se lit «lambda» !

$f(0) = \lambda e^0 = \lambda$!

b) loi exponentielle de paramètre λ :



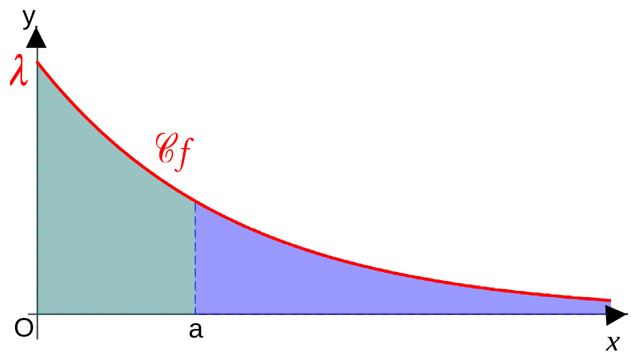
définition : Soit λ un nombre réel positif.
Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ quand sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

propriétés : X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ
Pour tous nombres réels positifs a et b tels que $0 \leqslant a \leqslant b$, on a :

1▶ $P(X \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a}$

2▶ $P(X > a) = e^{-\lambda a}$

3▶ $P(a \leqslant X \leqslant b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$



▶ **démonstrations**

1▶ $P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a = -e^{-\lambda a} - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda a}$

2▶ «X > a» est l'événement contraire à «X ⩽ a».
On a donc $P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a}$

3▶ $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_a^b = -e^{-\lambda b} - (-e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

propriété :
Si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors la loi de probabilité de X est une loi de durée de vie sans vieillissement et vérifie :

$$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h) \text{ (t et h étant deux réels positifs)}$$

▶ **démonstration**
D'après la définition d'une probabilité conditionnelle, on a

P((X ⩾ t + h) ∩ (X ⩾ t)) peut s'écrire aussi P((X ⩾ t + h) **et** (X ⩾ t))

$$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = \frac{P\big((X \geqslant t + h) \cap (X \geqslant t)\big)}{P(X \geqslant t)}$$

L' événement $(X \geqslant t + h) \cap (X \geqslant t)$ signifie $(X \geqslant t + h)$ donc

$$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = \frac{P(X \geqslant t + h)}{P(X \geqslant t)}$$ Or, $P(X \geqslant t + h) = e^{-\lambda(t+h)}$ et $P(X \geqslant t) = e^{-\lambda t}$

D'où $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = \dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda t - \lambda h + \lambda t} = e^{-\lambda h} = P(X \geqslant h)$.

Il en résulte que $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)$

On admet la propriété réciproque. On conclut donc qu' une loi de probabilité de durée de vie sans vieillissement est obligatoirement une loi exponentielle.

c) espérance :

définition : Soit une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle.

Soit f sa densité de probabilité définie sur [0 ; +∞[
L'espérance de X est définie par :

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t \times f(t)dt$$

propriété : Soit λ un nombre réel positif.

Soit une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
L' espérance de X est donnée par :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

► ***démonstration*** - *exigible* ROC -

Soit h la fonction définie sur ℝ par h(t) = tf(t). f est une densité de probabilité donc elle est continue sur [0 ; +∞[. Par suite, h est continue et admet donc des primitives sur [0 ; +∞[.

Or, pour tout réel positif t, on a $\left(t \times e^{-\lambda t}\right)' = 1 \times e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}$

On peut donc écrire :

$$\int_0^x h(t)dt = \int_0^x t \times \lambda e^{-\lambda t}dt = -\int_0^x \left(t \times e^{-\lambda t}\right)'dt + \int_0^x e^{-\lambda t}\,dt$$

donc,

$$\int_0^x h(t)dt = -\left[te^{-\lambda t}\right]_0^x + \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^x = -(xe^{-x} - 0) + \left[\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right] = \frac{1}{\lambda} - xe^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$$

or, $\lim_{x \to +\infty} -xe^{-\lambda x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} = 0$

donc $E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t \times f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x h(t)dt = \frac{1}{\lambda}$