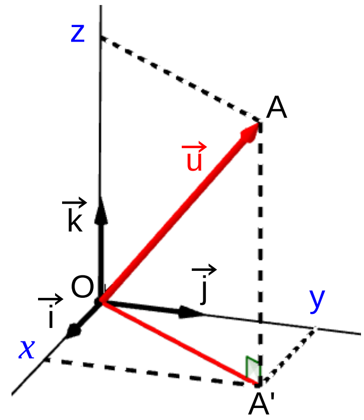
Produit scalaire dans l'espace

I) Norme d'un vecteur dans l'espace :

définition :
Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. Soient deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La norme de $\vec{u}$ notée $\|\vec{u}\|$ est la distance AB. $\|\vec{u}\| = AB$

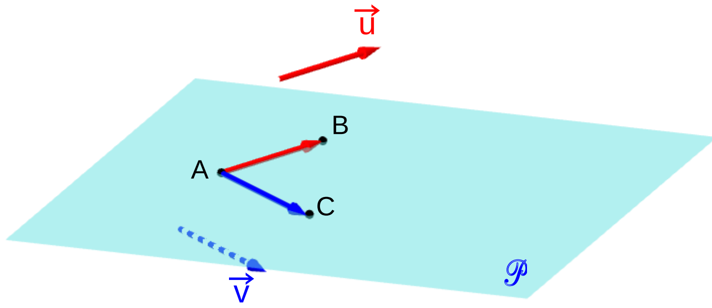
propriété : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
Soit $\vec{u}(x ; y ; z)$. On a : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



► ***démonstration***
Soit A, le point tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.
Les coordonnées de A sont donc $(x ; y ; z)$.
Soit A' le projeté orthogonal de A sur le plan de base $(\vec{i}, \vec{j})$.
A' a pour coordonnées $(x ; y ; 0)$. Le repère est orthonormé donc
$OA^2 = OA'^2 + AA'^2$, ce qui revient à dire que :
$\|\vec{u}\|^2 = OA^2 = OA'^2 + AA'^2 = x^2 + y^2 + z^2$ d' où $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

II) Produit scalaire dans l'espace :

Deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont forcément coplanaires.

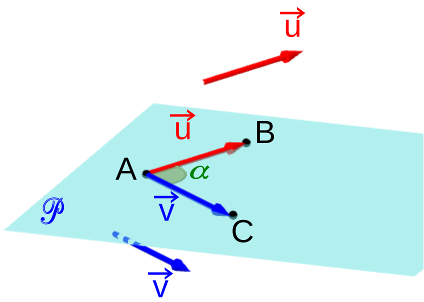


En effet, considérons les 3 points A, B, C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

On sait qu'il existe un plan $\mathscr{P}$ dans lequel les points A, B, C sont contenus.

Le produit scalaire dans l'espace de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sera défini de la même manière que le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan $\mathscr{P}$.

a) définitions :



définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u}.\vec{v}$ est le **nombre réel** défini par :

- $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u},\vec{v})$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

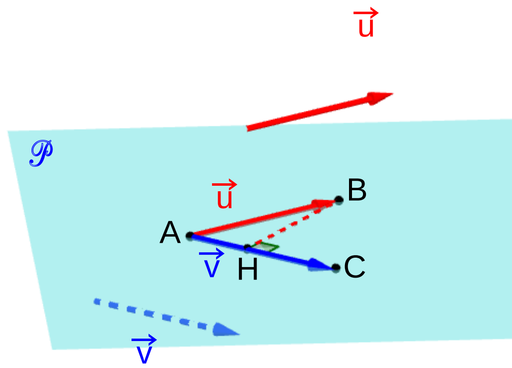
Soit α la mesure de l'angle géométrique associé à $(\vec{u},\vec{v})$
$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$

l'angle géométrique a le même cosinus que l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ auquel il est associé !!

Dans le cas de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non nuls, on a donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

consequence : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$ est noté $\overrightarrow{AB}^2$ (carré scalaire de $\overrightarrow{AB}$)

b) autres expressions du produit scalaire :



► **avec le projeté orthogonal d'un point**

propriété : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Soit A un point de l'espace.
Notons B et C les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Soit H, le projeté orthogonal de B sur la droite (AC)
On a :

$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}$$

► **avec les normes des vecteurs**

propriété : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On a :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

► **avec les coordonnées des vecteurs (expression analytique du produit scalaire)**

propriété : L'espace est muni d'un repère orthonormé l'espace $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
Soient $\vec{u}(x ; y ; z)$ et $\vec{v}(x' ; y' ; z')$ deux vecteurs de l'espace.
On a alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = x x' + yy' + zz'$$

► ***démonstration***

D'après la propriété précédente, $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.

Or, $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$
et $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 + (z + z')^2$

première propriété du chapitre !

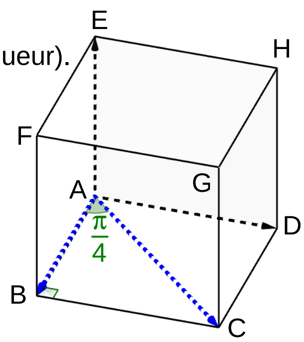
Donc, $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

$= \frac{1}{2}(x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 + z^2 + 2zz' + z'^2 - x^2 - y^2 - z^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2)$

$= \frac{1}{2}(2xx' + 2yy' + 2zz') = xx' + yy' + zz'$

Ex :

► Soient $\vec{u}(3 ; -2 ; 4)$ et $\vec{v}(-5 ; 6 ; 4)$
$\vec{u}.\vec{v} = 3 \times (-5) + (-2) \times 6 + 4 \times 4 = -15 - 12 + 16 = -11$



► Soit un cube ABCDEFGH avec AB = 1 (on a muni l'espace d'une unité de longueur).
On peut calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ de plusieurs façons :
- en utilisant un projeté orthogonal : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2 = 1$

le projeté orthogonal de C sur (AB) est B

- en utilisant le cosinus : $= AB \times AC \times \cos\frac{\pi}{4} = 1 \times 1\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

- en utilisant les coordonnées dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$
on a $\overrightarrow{AB}(1;0;0)$; $\overrightarrow{AC}(1;1;0)$ donc, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 = 1$

c) règles de calcul :

propriétés : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Soit un nombre réel k

1▶ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

2▶ $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$

3▶ $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

► ***démonstrations***

1▶ et **2▶**
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires, les deux propriétés découlent des propriétés du produit scalaire établies dans le plan (cours de première).

3▶ - Si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, la propriété résulte de celle déjà établie concernant le produit scalaire dans le plan (cours de première).

- Si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires, on munit l'espace d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $\vec{u}(x ; y ; z)$, $\vec{v}(x' ; y' ; z')$ et $\vec{w}(x'' ; y'' ; z'')$.

Les coordonnées de $\vec{v} + \vec{w}$ sont alors $(x' + x'' ; y' + y'' ; z' + z'')$

Donc, $\mathbf{\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w})} = x(x' + x'') + y(y' + y'') + z(z' + z'') = xx' + xx'' + yy' + yy'' + zz' + zz''$

$= (xx' + yy' + zz') + (xx'' + yy'' + zz'') = \mathbf{\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}}$

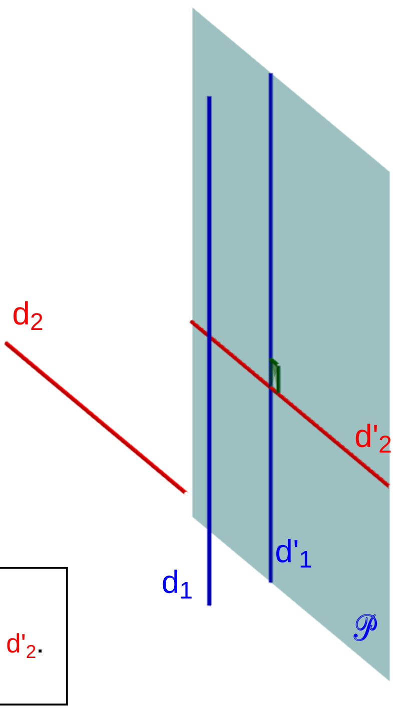
***conséquences** (identités remarquables) :*
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

III) Orthogonalité dans l'espace :

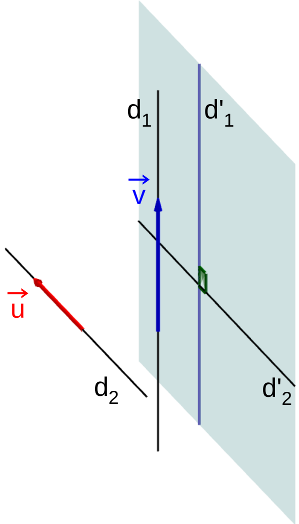
a) droites orthogonales - vecteurs orthogonaux :

définition (rappel) : Dans l'espace, deux droites d_1 et d_2 sont orthogonales si, et seulement si, il existe deux droites coplanaires d'_1 et d'_2 qui leur sont respectivement parallèles et perpendiculaires entre elles.



On a $d_1 // d'_1$ et $d_2 // d'_2$.
d'_1 et d'_2 sont contenues dans un même plan $\mathscr{P}$ et $d'_1 \perp d'_2$.
Par suite, d_1 et d_2 sont orthogonales !

définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont orthogonaux si, et seulement si, ils sont des vecteurs directeurs de deux droites orthogonales.



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs respectivement de deux droites orthogonales d_1 et d_2 donc $\vec{u} \perp \vec{v}$.

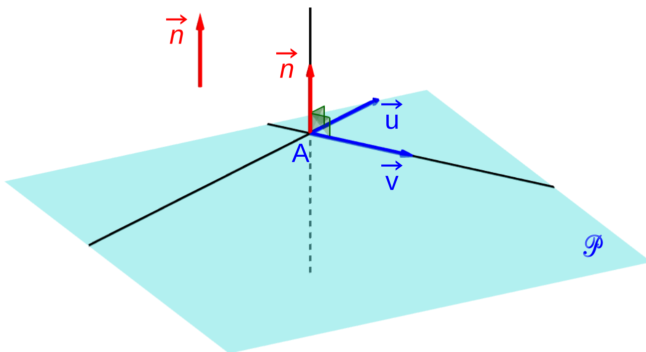
Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs !

propriété :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Nous avions établi (en Première) que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}.\vec{v} = 0$
Par suite, les vecteurs $\vec{u}(x ; y ; z)$ et $\vec{v}(x' ; y' ; z')$ sont orthogonaux si, et seulement si, $xx' + yy' + zz' = 0$

b) vecteur normal à un plan :

définition : Soient un plan $\mathscr{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace.
$\vec{n}$ est normal au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

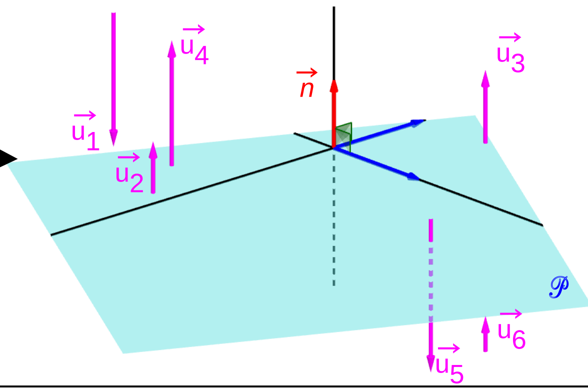
propriété : Soient un plan $\mathscr{P}(A ; \vec{u}, \vec{v})$ et $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace.
$\vec{n}$ est normal au plan $\mathscr{P}$ s'il est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$



► ***démonstration***
Par définition, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls et non colinéaires du plan $\mathscr{P}$.
Supposons qu'ils sont orthogonaux à un vecteur de l'espace $\vec{n}$.
Un vecteur $\vec{w}$ admettant un représentant dans $\mathscr{P}$ peut se décomposer à l'aide de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il existe donc deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
Par suite, $\vec{w}.\vec{n} = (a\vec{u} + b\vec{v}).\vec{n} = a\vec{u}.\vec{n} + b\vec{v}.\vec{n} = 0$ puisque $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Donc $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur $\vec{w}$ admettant un représentant dans $\mathscr{P}$.
Il en résulte que $\vec{n}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.

Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à un plan $\mathscr{P}$
Tout vecteur non nul, colinéaire à $\vec{n}$, est également normal à $\mathscr{P}$!

$\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$, $\vec{u_4}$, $\vec{u_5}$ et $\vec{u_6}$ sont colinéaires à $\vec{n}$ et normaux à $\mathscr{P}$



propriété : Un vecteur normal à un plan $\mathscr{P}$ est orthogonal à tous les vecteurs du plan $\mathscr{P}$.

► ***démonstration***

Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à un plan $\mathscr{P}$. Il est donc orthogonal (voir propriété précédente) à deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathscr{P}$.

Pour tout vecteur $\vec{w}$ de $\mathscr{P}$, il existe donc deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Par suite, $\vec{w}.\vec{n} = (a\vec{u} + b\vec{v}).\vec{n} = a\vec{u}.\vec{n} + b\vec{v}.\vec{n} = 0$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathscr{P}$.

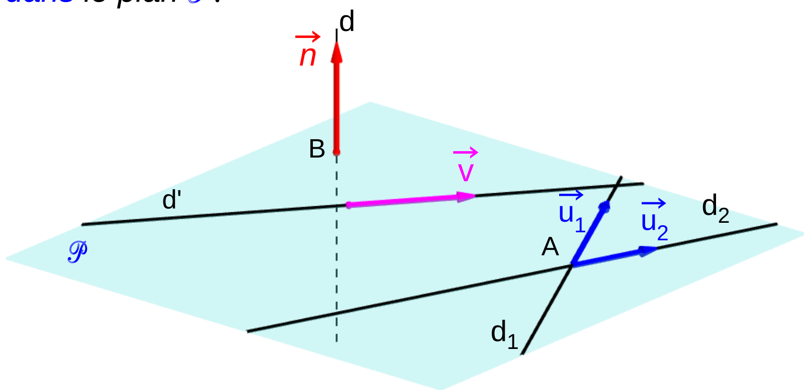
c) orthogonalité d'une droite et d'un plan :

► **démonstration de la propriété admise dans le chapitre "espace"**

rappel de la propriété :

Pour qu'une droite d soit orthogonale à un plan $\mathscr{P}$, il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites d_1 et d_2 sécantes contenues dans le plan $\mathscr{P}$.

► ***démonstration*** - *exigible* ROC -



Soient deux droites d_1 et d_2 contenues dans un plan $\mathscr{P}$ et sécantes en A.

Soient $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ deux vecteurs directeurs respectivement de d_1 et d_2.

Soit $\vec{n}$ un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

Soit la droite d de vecteur directeur $\vec{n}$ et passant par un point B de $\mathscr{P}$.

$\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont non nuls et non colinéaires. On peut donc définir le $\mathscr{P}$ ainsi : $(A ; \vec{u_1}, \vec{u_2})$.

Par hypothèse, d est orthogonale à d_1 et à d_2 donc $\vec{n}.\vec{u_1} = \vec{n}.\vec{u_2} = 0$.

Soit une droite quelconque d' contenue dans $\mathscr{P}$ et de vecteur directeur $\vec{v}$.

Il existe deux réels a et b tels que $\vec{v} = a\vec{u_1} + b\vec{u_2}$.

Donc, $\vec{n}.\vec{v} = (a\vec{u_1} + b\vec{u_2}).\vec{n} = a\vec{u_1}.\vec{n} + b\vec{u_2}.\vec{n} = 0$

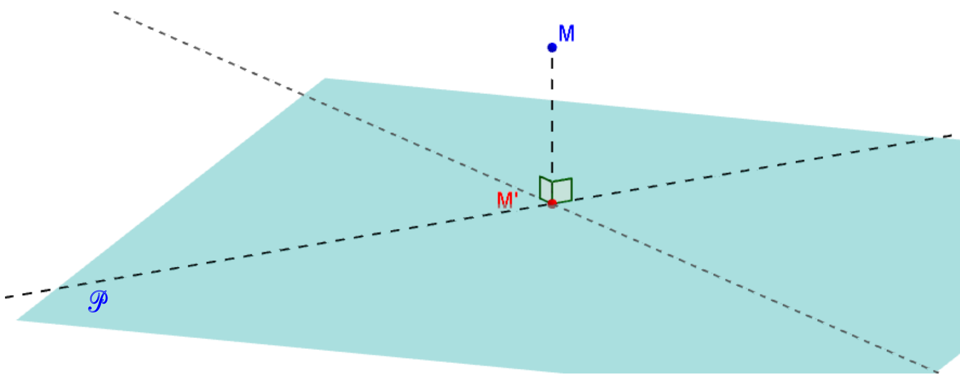
Par suite, d est orthogonale à une droite quelconque d' du plan $\mathscr{P}$.

Il en résulte que d est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

d) projection orthogonale sur un plan :

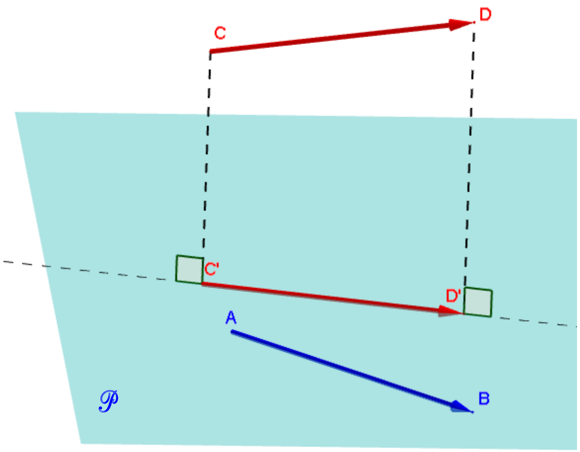
définition : Soient un plan $\mathscr{P}$ et M un point de l'espace.

On appelle projeté orthogonal de M sur le plan $\mathscr{P}$ le point M', point d' intersection de $\mathscr{P}$ et de la droite perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par M



propriété : Soient A, B, C et D quatre points de l'espace et $\mathscr{P}$ un plan contenant A et B. On note C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur $\mathscr{P}$. On a alors :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$

le produit scalaire ne change pas en utilisant les projetés orthogonaux de C et D sur $\mathscr{P}$!



► ***démonstration***
Soient A, B, C et D quatre points de l'espace et $\mathscr{P}$ un plan contenant A et B. Soient C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur $\mathscr{P}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{D'D})$
$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{D'D}$
or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{D'D} = 0$
Par suite, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$

e) équation cartésienne d'un plan :

propriété : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
Soit $\vec{n}$ (a;b;c) un vecteur normal à $\mathscr{P}$.
$\mathscr{P}$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec d étant un réel.

► ***démonstration*** - *exigible* ROC -
Soit un point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ de $\mathscr{P}$. Soit un point $M(x ; y ;z)$ quelconque de $\mathscr{P}$.
$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$. Donc, $a(x- x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$.
D'où $ax + by + cz - a(x_A + by_A + cz_A) = 0$.
On a bien une équation du type $ax + by + cz + d = 0$ avec $d = - a(x_A + by_A + cz_A)$.

on a donc plusieurs équations cartésiennes possibles pour un plan ! On peut changer de point A !!

Ex : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit un plan $\mathscr{P}$ défini par un point M(3 ; – 4 ; 1) et un vecteur normal $\vec{n}(-3 ; 2 ; 4)$.
Déterminons une équation cartésienne de $\mathscr{P}$:
Une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est donc du type $-3x + 2y + 4z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$
M appartient à $\mathscr{P}$ donc ses coordonnées vérifient l'équation.
Par suite, $-3 \times 3 + 2 \times (-4) + 4 \times 1 + d = 0$ donc $d = 9 + 8 - 4 = 13$
Un équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est $\mathbf{-3x + 2y + 4z + 13 = 0}$

propriété : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
Pour tous réels a, b, c non tous nuls, l'ensemble des points M(x ; y ; z) tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan.

► ***démonstration*** - *exigible* ROC -

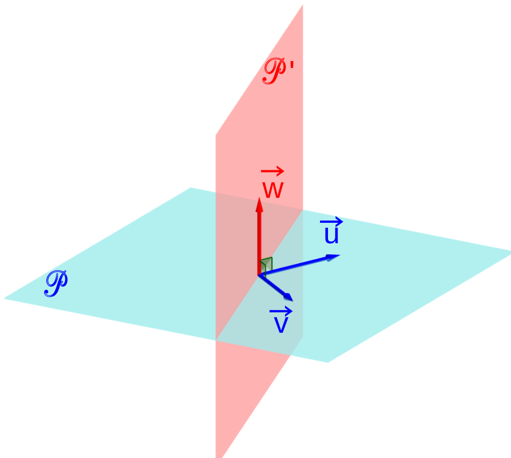
Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des points M(x ; y ; z) vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$.
a, b, c étant non tous nuls, supposons que $a \neq 0$.
Le point $A\left(-\dfrac{d}{a}\,,\,0\,,\,0\right)$ vérifie l'équation cartésienne et appartient donc à $\mathscr{P}$.
Soit le vecteur $\vec{n}(a\,;b\,;c)$. On a $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = a\left(x - \left(-\dfrac{d}{a}\right)\right) + by + cz = ax + by + cz + d$.
L'ensemble des points M est donc tel que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$
Il s'agit donc du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

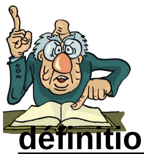
Ex : Soit un plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $3x + 2y - z - 5 = 0$.
Il passe par le point A(2 ; 1 ; 3) et le vecteur $\vec{n}(3\,;2\,;-1)$ est normal à $\mathscr{P}$.

f) plans perpendiculaires :

définition 1 : Deux plans sont perpendiculaires quand un vecteur de l' un est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de l'autre plan.

$\vec{w}$ appartient à $\mathscr{P}'$ et est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ contenus dans $\mathscr{P}$ donc $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires !





définition 2 : Deux plans sont perpendiculaires quand un vecteur normal de l' un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

$\vec{n}_2$ est normal à $\mathscr{P}'$ et $\vec{n}_1$ est normal à $\mathscr{P}$.
De plus, $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_1$ sont orthogonaux.
Donc $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires !