# RÉCURRENCE
# LIMITE D' UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

## I) Raisonnement par récurrence :

**En quoi ce type de raisonnement est-t-il utile ?**
Prenons un exemple :
On veut démontrer que la propriété : «**$3^n - 3$ est un multiple de 6**» est vraie pour tout $n \geqslant 1$.
Si n=1 on a $3^1 - 3 = 0$, la propriété est vérifiée. Si n=2 on a $3^2 - 3 = 6$, la propriété est vérifiée.
Il est évidemment impossible de poursuivre indéfiniment les vérifications !
Comment vérifier alors que la propriété est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 ?
Le raisonnement par récurrence va nous permettre de procéder à une telle démonstration.

### a) approche de la démarche : le jeu de "la chute de dominos"

Pour réussir à jouer, deux conditions sont nécessaires:

1) avoir enclenché, ***initialisé*** le processus (pousser le premier domino)

2) avoir placé les dominos convenablement pour que la chute de l'un entraîne la chute du suivant (en assimilant nos dominos aux descendants successifs d' une même famille, on parlerait d'**hérédité**)

Cette situation illustre bien le principe du raisonnement par récurrence.

du latin recurrere "revenir en arrière"

### b) principe du raisonnement par récurrence :

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété $P_n$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel $n_0$ donné, on procède en trois étapes :

► **Initialisation** : On vérifie que **$P_{n_0}$ est vraie**.

► **Hérédité** : **On suppose que la propriété $P_n$ est vraie** pour un entier n ($n \geqslant n_0$) quelconque et **on montre que**, sous cette hypothèse (appelée hypothèse de récurrence), la propriété **$P_{n+1}$ est vraie**. On a alors prouvé que l'hypothèse de récurrence est héréditaire.

► **Conclusion** : La propriété **$P_n$** étant **vraie au rang $n_0$ et** étant **héréditaire**, elle est vraie pour tout entier naturel n ($n \geqslant n_0$).

Attention, l'**initialisation** est obligatoire ! Des propriétés héréditaires peuvent être fausses. Par exemple, la propriété «$2^n$ est un multiple de 3 ».

Ex :

Démontrons par récurrence que la propriété $P_n$ : «$3^n - 3$ est un multiple de 6» est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1.

Initialisation : Pour n=1, on a $3^n - 3 = 3^1 - 3 = 0$ donc la propriété $P_1$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel ($n \geqslant 1$) quelconque fixé.
Supposons que $P_n$ est vraie (hypothèse de récurrence). Montrons que $P_{n+1}$ est vraie.
D'après l' hypothèse de récurrence, $3^n - 3$ est un multiple de 6. Il existe donc un entier k tel que $3^n - 3 = 6k$.
On a alors $3^{n+1} - 3 = 3(3^n - 1) = 3(3^n - 3 + 2) = 3(3^n - 3) + 6 = 3 \times 6k + 6 = 6(3k + 1)$.
Or, $3k + 1$ est un entier donc $3^{n+1} - 3$ est un multiple de 6.
Par suite, la propriété $P_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : La propriété $P_n$ étant vraie au rang 1 et étant héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n ($n \geqslant 1$).

## II) Limite d'une suite géométrique :

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0$ tel que $q \neq 0$.
On sait que tout terme de la suite de rang n s'écrit $u_n = u_0 \times q^n$
On déduira donc le comportement de la suite $u_n$ en étudiant celui de la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel n par $v_n=q^n$ (voir théorèmes concernant les limites de suites et les opérations)

**propriétés** :

► Soit q un nombre réel, si $q>1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

► ***démonstration*** - *exigible* -

Soit un nombre réel q tel que q>1. Soit la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel n par $v_n=q^n$
q > 1 donc il existe un nombre réel a strictement supérieur à 0 tel que q = 1 + a
La suite $(v_n)$ est alors définie sur $\mathbb{N}$ pour tout entier naturel n par $q^n = (1+a)^n$
Les premiers termes de la suite $(v_n)$ s'écrivent donc :
$q^0 = (1 + a)^0 = 1 = 1 + 0a$
$q^1 = (1 + a)^1 = 1 + a = 1 + 1a$
$q^2 = (1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2$
$q^3 = 1 + 3a + 3a^2 + a^3$ etc...
En observant les premiers termes, il semble utile de comparer les suites $q^n$ et 1 + na.

Pour cela, démontrons par récurrence que la propriété $P_n$ : « $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$ » est vraie pour tout entier naturel n.

cette propriété est **l'inégalité de Bernoulli** !

Initialisation :
Pour n=0, on a $(1 + a)^0 = 1$ or $1 = 1 + 0a$ donc $1 \geqslant 1 + 0a$ donc $P_0$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel quelconque fixé.
Supposons que $P_n$ est vraie. Montrons que $P_{n+1}$ est vraie.
D'après l' hypothèse de récurrence, $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$
donc $(1 + a)(1 + a)^n \geqslant (1 + a)(1 + na)$
donc $(1 + a)^{n+1} \geqslant 1 + a + na + na^2$
donc $(1 + a)^{n+1} \geqslant 1 + a(1 + n) + na^2$
or $na^2>0$ donc $(1 + a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$
par suite, $P_{n+1}$ est vraie
Conclusion : La propriété $P_n$ étant vraie au rang 0 et étant héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n et $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$

On a $q^n = (1 + a)^n$ donc, d'après l'inégalité de Bernoulli, $q^n \geqslant 1 + na$ or, a >0

donc $\lim\limits_{n \to +\infty}(1 + na) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty}(1 + a)^n = +\infty$ (théorème de comparaison).

Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

▶ Soit q un nombre réel, si $-1<q<1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ (admis)

cette propriété sera très souvent utilisée !!

▶ Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$ (admis)

▶ Si $q \leqslant -1$ alors la suite $(q^n)$ n'a pas de limite. (admis)

<u>Ex :</u>

▶ la suite géométrique $v_n = -3\left(\sqrt{5}\right)^n$ a pour premier terme $v_0 = -3$ et pour raison $q = \sqrt{5}$.

Etant donné que $q>1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ or, $v_n = -3q^n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

▶ la suite géométrique $w_n = 11 \times \left(\frac{1}{7}\right)^n$ a pour premier terme $w_0 = 11$ et pour raison $q = \frac{1}{7}$.

Etant donné que $-1<q<1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ or, $w_n = 11 \times q^n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

▶ la suite géométrique $u_n = 2 \times (-3)^n$ a pour premier terme $u_0 = 2$ et pour raison $q = -3$. Étant donné que $q \leqslant -1$, la suite $q^n$ n'a pas de limite donc, la suite $u_n$ n'a pas de limite.

voici les premiers termes de la suite !